Канаев Артем

Весовая фильтрация на когомологиях лог-схем

Аннотация

В работе проверяется, что естественное отображение $R\Gamma R\Psi\mathbb{Z} \to R\Gamma R\Psi'\mathbb{Z}$ является квазиизоморфизмом на Gr_n^M для отображения собственных полустабильных семейств $X' \to X$ раздутия X в допустимом подмногообразии.

Близкие циклы

Пусть $X \to D$ - комплексное алгебраическое семейство над диском, гладкое над $D - 0 := D^*$, Y - слой над нулем.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d] & X\setminus Y \arrow[l, "j"'] \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & D & D^* \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Обозначим за $\widetilde{D^*}$ универсальную накрывающую D^*, а $\widetilde{X} = X \times_D \widetilde{D^*}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[l, "j'"'] \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & D & \widetilde{D^*} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Нас интересует комплекс близких циклов $R\Psi\mathbb{Z} := i^* R j'_* j'^* \mathbb{Z}$. Комплекс близких циклов это объект в производной категории пучков $\mathbb{Z}$ - модулей на особом слое, на котором определено действие группы $\pi_1(D - 0) = \mathbb{Z}$ отображением T. В этой работе рассматривается случай собственного семейства с полустабильной редукцией, то есть такого семейства, которое в каждой точке особого слоя имеет этальную окрестность вида $\mathbb{C}[x_1, \dots x_n]/(x_1 x_2 \dots x_k - t)$, что равносильно условию на Y быть дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Монодромическая фильтрация

Пусть A - объект абелевой категории C, а N - отображение из A в A, $N^{n+1} = 0$. Определим возрастающую фильтрацию $F_p A = Ker(N^{p+1} : A \to A)$, $F_{-1}A = 0$ и убывающую фильтрацию $G_q A = im(N^q : A \to A)$, $G_0 = A$. Определим возрастающую фильтрацию на $M_r A = \sum_{p-q=r}(F_p A \cap G_q A)$.

Предложение 0.1. *Фильтрация M обладает и однозначно определяется следующими свойствами:*

(1) $M_n A = A$ и $M_{-n-1}A = 0$

(2) $N : A \to A$ отображает $M_r A$ в $M_{r-2}A$

(3) Если $r \geq 0$ $\bar{N}^r : Gr_r^M A \to Gr_{-r}^M A$ изоморфизм

Доказательство. [?] $\square$

Фильтрация M_n называется монодромической фильтрацией. Например, пусть $N^2 = 0$. Тогда $M_1 = A$, $M_0 = KerN$, $M_{-1} = imN$, $M_{-2} = 0$ и $\bar{N} : A/KerN \to imN$ изоморфизм. Также нам потребуется следующая конструкция. Пусть $(K^\bullet, W)$ фильтрованный комплекс. По фильтрации W посмотроим decalé filtration $Dec(W)_n K = \{x \in W_{n-i}K^i | dx \in W_{n-i-1}K^{i-1}\}$. Основное свойство этой фильтрацииследующее: естественное отображение из $Gr^i_{Dec(W)}K[i]$ в $E_1^{\bullet,i}$ является квазиизоморфизмом, где $E_1^{\bullet,i}$ - строчка в первом листе спектральной последовательности, построенной по фильтрации W, рассматриваемая как комплекс.

Весовая спектральная последовательность

В случае полустабильной редукции комплекс близких циклов является объектом абелевой подкатегории $[-n]$ - извращенных пучков производной категории пучков на Y, и оператор монодромии $T-1$ действует на нем нильпотентно. Без доказательства запишем основные свойства монодромической фильтрации на $R\Psi\mathbb{Z}$ для оператора монодромии $T-1$. Пусть $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ неприводимые компоненты Y, для каждого подмножества $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим за Y_I пересечение компонент с индексами в I. Обозначим за a_p естественное отображение $Y^p = \bigsqcup_{card(I)=p+1} Y_I \to Y$.

Предложение 0.2. *Пусть X - полустабильное семейство над диском D, тогда существует естественный изоморфизм*

$$\oplus_{p-q=r} a_{p+q*}\mathbb{Z}[-(p+q)] = Gr^M_r R\Psi\mathbb{Z}$$

Предложение 0.3. *Пусть X полустабильно и собственно над D. Тогда изоморфизм выше индуцирует спектральную последовательность*

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq max(0,-p)} H^{q-2i}(Y^{p+2i}, \mathbb{Z}) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q} R\Psi\mathbb{Z}$$

Далее мы хотим понять как устроены дифференциалы в первом листе, а для нам понадобятся следующие обозначения. Для $J \subset I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $card(I) = card(J)+1$ пусть $i_{IJ} : Y_I \to Y_J$ замкнутое вложение, i^*_{IJ}, i_{IJ*} индуцированное отображение на когомологиях и гомоморфизм Гизина соответственно. Упорядочим элементы I по возрастанию, и пусть $a_j \in I, a_j \notin J$. Обозначим за $\epsilon(I, J) = (-1)^j$. Тогда

$$\delta^*_p : H^q(Y^p, \mathbb{Z}) \to H^q(Y^{p+1}, \mathbb{Z}) = \sum_{J \subset I, card(I) = card(J)+1 = p+2} \epsilon(I, J) i^*_{IJ}$$

и аналогично

$$\delta_{p*} : H^q(Y^p, \mathbb{Z}) \to H^{q+2}(Y^{p-1}, \mathbb{Z}) = \sum_{J \subset I, card(I) = card(J)+1 = p+1} \epsilon(I, J) i_{IJ*}$$

.

Предложение 0.4. *Комплекс $E_1^{\bullet,q} = \bigoplus_{j-i=\bullet} H^{q-2i}(Y^{i+j}, \mathbb{Z})$ это свертка бикомплекса $H^{q-2i}(Y^{i+j}, \mathbb{Z}, \delta_{i+j*}, \delta^*_{i+j})$*

Также нам нужна в некотором виде функториальность весовой спектральной последовательности. Пусть $f : X \to X'$ полустабильные семейства над диском. Как и раньше, Y_i, Y'_j обозначают неприводимые компоненты особого слоя. Поскольку особый слой приведен, то для каждого Y_i существует единственное j такое, что $f(Y_i) \subset Y'_j$. Пусть $\phi : \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, m'\}$ переводит i в j. Для каждого $I \subset \{1, 2, \dots, m\}$ такого, что $card(I) = card(\phi(I))$ обозначим $f_{I\phi(I)} : Y_I \to Y'_{\phi(I)}$ ограничение f на Y_I. Определим $f^{p*} : H^q(Y'^p, \mathbb{Z}) \to H^q(Y^p, \mathbb{Z})$ как сумму $f^*_{I\phi(I)}$ по всем I таким, что $card(I) = card(\phi(I)) = p + 1$.

Предложение 0.5. *Пусть X, X' собственные полустабильные семейства. Тогда отображение $f^* : R\Gamma R\Psi'\mathbb{Z} \to R\Gamma R\Psi\mathbb{Z}$ фильтрованных комплексов индуцирует отображение спектральных последовательностей*

$$f^* : E_1'^{p,q} \to E_1^{p,q} | \bigoplus_{i \geq max(0,-p)} H^{q-2i}(Y'^{p+2i}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\oplus f^{p+2i*}} \bigoplus_{i \geq max(0,-p)} H^{q-2i}(Y^{p+2i}, \mathbb{Z})$$

Доказательства всех утверждений в этой секции можно посмотреть в [?]

Проверка для допустимого раздутия

Как и раньше, X это собственное полустабильное семейство с особым слоем Y. Пусть подмногообразие $Z \subset Y$ гладкое неприводимое. Тогда оно лежит в какой-то неприводимой компоненте Y_0. Назовем Z допустимым, если оно трансверсально пересекается со всеми Y_I для $0 \notin I \subset \{0, 1, \dots, n\}$. В таком случае раздутие X в Z снова будет являться собственным полустабильным семейством над диском. Особый слой X_Z состоит из неприводимых компонент $Bl_Z(Y_0), \dots Bl_{Z \cap Y_n}(Y_n), \widetilde{Z}$, где $\widetilde{Z}$ - исключительный дивизор. Когомологии раздутия $H^q(Bl_{Z\cap Y_n}(Y_n), \mathbb{Z})$ изоморфны $H^q(Y_n, \mathbb{Z}) \oplus H^{q-2}(Z \cap Y_n, \mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H^{q-2(k-1)}(Z \cap Y_n, \mathbb{Z})$, где k - коразмерность $Z \cap Y_n$ в Y_n, и отображение проекции $H^q(Y_n, \mathbb{Z}) \to H^q(Bl_{Z\cap Y_n}(Y_n), \mathbb{Z})$ согласовано с разложением в прямую сумму. Из прошлой секции мы знаем, что факторы по decalé filtration совпадают (как комплексы) с строками весовой спектральной последовательности. Как видно из функториальности, отображение, индуцированное на факторах decalé filtration, совпадает построчно с отображениями бикомплексов в предложении 4. Отображение $E_1^{\bullet,q} \to E_1^{'\bullet,q}$ является вложением, поэтому достаточно проверить, что коядро (которое является бикомплексом) ациклично. Заметим, что в i -ой строке в бикомплексе $E_1^{'\bullet,q}$ для X_Z члены, относящиеся к когомологиям Z, образуют подкомплекс $K^{i,q}$, который совпадает с соответствующей строчкой коядра, потому что отображение $E_1^{\bullet,q} \to E_1^{'\bullet,q}$ расщепляется построчно, и расщепление задается факторизацией $E_1^{'\bullet,q}$ по $K^{i,q}$. Далее, в $K^{i,q}$ слагаемые $H^{q-2i}(Y'_I)/H^{q-2i}(Y_I)$ (то есть когомологии пересечений компонент без слагаемого, которое приходит отображением обратного образа с проекции на Y) образуют подкомплекс, отщепляющийся прямым слагаемым. Второе прямое слагаемое состоит из слагаемых $H^{q-2i}(Y_I \cap Z)$. Поскольку $H^{q-2i}(Y'_I \cap Z)/H^{q-2i}(Y_I \cap Z) = H^{q-2i}(Y'_I)/H^{q-2i}(Y_I)$ и $H^q(Y'_I \cap Z \cap Y_0) = H^q(Y'_I \cap Z)$, то когомологии есть только в нулевой градуировке, и равны $\bigoplus_I H^{q-2i-2}(Y_I \cap Z, \mathbb{Z}) \oplus H^{q-2i-2}(Z \cap Y_I, \mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H^{q-2i-2(k-1)}(Z \cap Y_I, \mathbb{Z})$ по всем $I \subset \{0, 1, \dots, n\}$, $card(I) = i$ (если $card(I) = 0$, то $Y_I = Y$) для первого, и $\bigoplus_I H^{q-2i}(Y_I \cap Y_0 \cap Z)$ по всем $card(I) = i - 1$ для второго.

Теперь заметим, что в первом листе спектральной последовательности бикомплекса для коядра $C^i = \bigoplus_I H^{q-2i-2}(Y_I \cap Z, \mathbb{Z}) \oplus H^{q-2i-2}(Z \cap Y_I, \mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H^{q-2i-2(k-1)}(Z \cap Y_I, \mathbb{Z})$,

$0 \notin I$ образуют подкомплекс C, причем фактор по нему изоморфен $C[-1]$. Другими словами, нулевой столбец второго листа есть конус некоторого отображения $C \to C$. Легко понять, что это отображение приходит из отображения Гизина $H^{\bullet-2}(\widetilde{Y}_I \cap \widetilde{Y}_0 \cap \widetilde{Z}) \to H^{\bullet}(\widetilde{Y}_I \cap \widetilde{Z})$, которое задает изоморфизм между двумя копиями комплекса C. Таким образом, единственный ненулевой столбец первого листа ацикличен, что и требовалось.