6 декабря 2019, Итоговая конференция МЛЗС «Молодые математики-2020»

Ряды Загье для функции Грина

Сахарова Нина, стажер-исследователь МЛЗС

В докладе рассматриваются модулярные формы от двух переменных, являющиеся гладкими представителями классов когомологий модулярных поверхностей. А именно, изучается случай, когда в качестве многообразия выступает дополнение к кривой Гекке (графику N-соответствия Гекке) на произведении двух стандартных модулярных кривых $Y_0(1)^2$. Гладкий представитель класса соответствия позволяет описать действие этого соответствия на когомологиях в терминах интегрального оператора. Используя построенную явно дифференциальную форму с простым полюсом на кривой Гекке $\Xi_N(z_1, z_2)$ (модулярное ядро Коши), в первой части мы рассмотрим обобщение результата Дона Загье об интегральном представлении операторов Гекке на случай параболических форм веса 2 произвольного уровня, а также приведем представление автоморфной функции Грина в виде регуляризованного интеграла по фундаментальной области конгруэнц-подгруппы Гекке. Вторая часть посвящена некоторым результатам о модулярном ядре Коши в случае модулярной поверхности Гильберта.

Часть 1

В 1975 году Дон Загье получил точную формулу следа операторов Гекке, действующего на пространстве параболических форм, в терминах интеграла по фундаментальной области модулярной группы $SL_2(\mathbb{Z})$ [11, 53-56]. Для этого в работе [16] Загье ввел ряд $\omega_m(z_1, z_2)$, который является бимодулярной формой от двух переменных и интегральным ядром преобразования Гекке, доказав что скалярное произведение Петерсона параболической формы $f(z_2)$ и функции $\omega_m(z_1, z_2)$, $f * \omega_m(z_1, z_2)$, можно отождествить с действием оператора Гекке $T(m)$ на параболическую форму f с точностью до константы, зависящей только от веса формы $k > 2$ и индекса оператора m.

Пусть $k > 2$. Рассмотрим ряд Загье:

$$\omega_m(z_1, \bar{z}_2, k) = \sum_{ad-bc=m} \frac{1}{(cz_1\bar{z}_2 + d\bar{z}_2 - az_1 - b)^k},$$

где суммирование производится по всем целочисленным матрицам $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с определителем m.

Теорема 1. *(Don Zagier) Обозначим через* Φ_1 *фундаментальную область для полной модулярной группы* Γ *в* $\mathbb{H}$ *и положим* $C_k = \dfrac{(-1)^{k/2}\pi}{2^{k-3}(k-1)}$; *тогда для всякой голоморфной параболической формы* f *веса* $k > 2$ *имеем*

$$\int_{\Phi_1} f(z_1)\omega_m(z_1, \bar{z}_2, k)(\Im(z_1))^{k-2}dz_1 d\bar{z}_1 = f * \overline{\omega_m(z_1, \bar{z}_2)} = C_k m^{1-k}(T_k(m)f)(z_2),$$

где $f * g = \int_\Phi f(z)\overline{g(z)}(\Im(z))^{k-2}dzd\bar{z}$ *– скалярное произведение Петерсона.*

Дон Загье доказал эту теорему используя метод Ранкина-Сельберга. Другой подход к доказательству этой теоремы в случае, когда вес $k = 2$, подразумевает построение модулярного ядра Коши, которое в свою очередь является первым примером дифференциальной формы на произведении двух модулярных кривых с логарифмической особенностью на кривой Гекке.

Пусть $z_1,\ z_2$ – произвольные точки из верхней полуплоскости $\mathfrak{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ и

$$\mu_\gamma(z_1, z_2) = cz_1z_2 + dz_2 + az_1 + b,$$

где $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ – целочисленная матрица с определителем m. Пусть $\Gamma_0(N)$ – конгруэнцподгруппа Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $X_0(N) \simeq \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}^*$, где $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Можно доказать, что имеется аналогичное интегральное представление для операторов Гекке на пространстве параболических форм веса 2 относительно группы $\Gamma_0(N)$. Положим

$$\mathrm{M}(m, N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = m, \quad (a, N) = 1, \quad c \equiv 0 \pmod N \right\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\omega_{m,N}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathrm{M}(m,N)} \frac{1}{\mu_\gamma(z_1, -z_2)^2}.$$

Ряд $\omega_{m,N}(z_1, z_2)$ не сходится абсолютно, но при помощи трюка Гекке можно рассмотреть аналитическое продолжение этого ряда и определить его в терминах предела.

Теорема 2. *Пусть* Φ_N *– фундаментальная область для модулярной группы* $\Gamma_0(N)$ *в* $\mathbb{H}$. *Предположим, что род* $X_0(N)$ *больше нуля. Тогда для всякой голоморфной параболической формы* f *веса 2 верно, что*

$$\int_{\Phi_N} f(z_1)\omega_{m,N}(z_1, \bar{z}_2)dz_2 d\bar{z}_2 = f * \overline{\omega_{m,N}(z_1, \bar{z}_2)} = 2\pi i m^{-1}\ (T_2(m)f)(z_1).$$

Модулярное ядро Коши $\Xi_N(z_1, z_2)$ – это модулярно инвариантная функция от двух переменных, имеющая асимптотику $\Xi_N(z_1, z_2) \sim \frac{1}{z_1 - z_2}$ при $z_1 \to z_2$. Наивно, ядро Коши задается следующим рядом:

$$\Xi_{N,k}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} \frac{1}{\mu_\gamma(z_1, -z_2)^k \mu_\gamma(z_1, -\bar{z}_2)^k}.$$

При $k = 1$ ряд $\Xi_{N,k}(z_1,z_2)$ не сходится абсолютно; однако точка $k = 1$ лежит на границе сходимости. Далее с помощью трюка Гекке, можно ввести ряд [12]:

$$\Xi_N(z_1,z_2,s) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)} \frac{\overline{\mu_\gamma(z_1,-z_2)}}{|\mu_\gamma(z_1,-z_2)|^{2s}}\frac{\overline{\mu_\gamma(z_1,-\bar{z}_2)}}{|\mu_\gamma(z_1,-\bar{z}_2)|^{2s}},$$

где s – комплексный параметр. Ряд $\Xi_N(z_1,z_2,s)$ может быть аналитически продолжен в точку $s = 1$ [12], после этого может быть определена функция $\Xi_N(z_1,z_2) = \lim_{s\to1}\Xi_N(z_1,z_2,s)$ и доказана Теорема 2.

Теперь рассмотрим случай, когда род модулярной кривой $X_0(N)$ равен нулю. Пусть

$$E^{\infty}_{2,N}(z,s) = \frac{1}{2}\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \frac{(c\bar{z}+d)^2}{|cz+d|^{4s}}$$

неголомофрный ряд Эйзенштейна с комплексным параметром s для параболической точки $i\infty$. Ряд Пуанкаре в параболической точке $i\infty$ с комплексным параметром s задается следующей формулой [15]:

$$P^{\infty}_{N,r'}(z,s) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \frac{e^{-2\pi i r'\gamma z_1}}{(cz+d)^2|cz+d|^{2s-2}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $p = e^{2\pi i z_1}$, $q = e^{2\pi i z_2}$, $\widetilde{q} = e^{2\pi i\bar{z}_2}$, *тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\,\Xi_N(z_1,z_2)(z_2-\bar{z}_2) = 2\pi i\lim_{s\to1}\left(E^{\infty}_N(z_1,s) + \sum_{r'>0}P^{\infty}_{N,r'}(z_1,s)\;q^{r'} + \sum_{r'<0}P^{\infty}_{N,r'}(z_1,s)\;\widetilde{q}^{r'}\right).$$

Обозначим за $J_{\Gamma_0(N)}(p)$ нормализованную образующую кольца модулярных функций относительно группы $\Gamma_0(N)$. Имеется следующая теорема [13]:

Теорема 4. *Пусть* $g(X_0(N)) = 0$, *тогда*

$$\left(\Xi_N(z_1,z_2)(z_2-\bar{z}_2) - 2\pi i\;E^{\infty}_{2,N}(z_1)\right)\;dz_1 = d_{z_1}\log\;\left|J_{\Gamma_0(N)}(p) - J_{\Gamma_0(N)}(q)\right|^2.$$

В 1980-х годах Койк, Нортон и Загье независимо друг от друга доказали, что имеет место следующее бесконечное произведение для разности двух образующих кольца модулярных функций относительно полной модулярной группы Γ:

$$J_\Gamma(p) - J_\Gamma(q) = p^{-1}\prod_{\substack{r>0\\ r'\in\mathbb{Z}}}(1-p^r q^{r'})^{c(rr')},$$

где $J_\Gamma(p) = j(p) - 744 = \frac{1}{p} + \sum_{n>0}c(n)p^n$. Как элементарное следствие Теоремы 3 и Теоремы 4, можно получить формулу бесконечного произведения для разности двух нормализованных образующих кольца модулярных функций группы $\Gamma_0(N)$ (в случае, когда род группы равен 0). Пусть $p_{r',N}(r)$ – r-ый коэффициент Фурье ряда Пуанкаре с параметром $r' > 0$, тогда [13]:

Теорема 5.

$$J_{\Gamma_0(N)}(p) - J_{\Gamma_0(N)}(q) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \prod_{\substack{r>0 \\ r'>0}} \prod_{d|(r,r',N)} \left(1 - p^r q^{r'}\right)^{p_{1,N}\left(rr'/d^2\right)\cdot d^2/rr'}.$$

Отметим, что логарифмическая производная и логарифм разности двух j- инвариантов является достаточно интересной функцией с изящными арифметическими приложениями. Логарифмическая производная разности двух образующую кольца модулярных функций относительно полной модулярной группы является центральным объектом изучения в статье [1], в которой Асаи, Канеко и Ниномия доказали, что для всякой точки $z_2 \in \mathbb{H}$ верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n(z_2) e^{2\pi i n z_1} = \frac{E_{4,1}^2(z_1) E_{6,1}(z_1)}{\Delta(z_1)} \cdot \frac{1}{J_1(z_1) - J_1(z_2)} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{J_1'(z_1)}{J_1(z_1) - J_1(z_2)}, \tag{1}$$

где функции $j_r(z) = r\ j_1(z)|T(r)$, $T(r)$ – оператор Гекке индекса r, образуют систему Гекке. К примеру:

$j_0(z_1) = 1,$
$j_1(z_1) = J_1(z_1) - 744 = q^{-1} + 196884q + ...,$
$j_2(z_1) = J_1(z)^2 - 1488J_1(z_1) + 159768 = q^{-2} + 42987520q + ...,$
$j_3(z_1) = J_1(z_1)^3 - 2232J_1(z_1)^2 + 1069956J_1(z_1) - 36866976 = q^{-3} + 2592899910q + ...$

Для функции $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(z_2) e^{2\pi i n z_1}$ в работе [1] используется обозначение $H_{z_2}(z_1)$. Таким образом, введенная нами функция $\Xi_1(z_1, z_2)$ связана с функцией $H_{z_2}(z_1)$ следующим соотношением: $\Xi_1(z_1, z_2) = -H_{z_2}(z_1) + 2\pi i E_{2,1}^{\infty}(z_1)$.

В статье [8] Брунье, Конен и Оно получили много арифметических следствий из формулы (1). Например, была доказана следующая теорема:

Теорема 6. *(Brunier, Kohnen, Ono) Пусть $f = \sum_{n=h}^{\infty} a_n q^n$ – ненулевая мероморфная модулярная форма веса k относительно группы Γ, такая, что $a_h = 1$. Пусть, как и ранее, Φ_1 – фундаментальная область группы Γ, и*

$$e_z = \begin{cases} 1/2, & z = i \\ 1/3, & z = \omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \\ 1, & z \neq i, \omega \end{cases}$$

Тогда имеется следующее выражение для тэта-оператора Рамануджана:

$$\Theta(f) := \sum_{n=h}^{\infty} n a_n e^{2\pi i n z_1} = \frac{k E_{2,1}(z_1) f(z_1)}{12} - f(z_1) f_{\Theta}(z_1),$$

где

$$f_{\Theta} := \sum_{z_2 \in \Phi_1} e_{z_2} \mathrm{ord}_{z_2}(f)\ H_{z_2}(z_1)$$

Эта теорема дает некоторую алгебраическую информацию о функциях $H_{z_2}(z_1)$ и $j_n(z)$, вычисленных в конечном наборе точек дивизора мероморфной модулярной формы. Шнейдер доказал, что если число z алгебраично и имеет степень большую 2, то $J_1(z)$ трансцендентно (1937). Следующее следствие [8] из Теоремы 6 в свою очередь обобщает классический факт о том, что, если z – точка Хегнера, то $J_1(z)$ алгебраично:

Следствие 1. *(Brunier, Kohnen, Ono) Пусть $f = \sum_{n=h}^{\infty} a_n q^n$ – мероморфная модулярная форма веса k относительно группы Γ, такая, что $a_h = 1$. Если z^0 – точка, для которой $\operatorname{ord}_{z^0}(f) \neq 0$, и коэффициенты f лежат в числовом поле K, то $J_1(z^0)$ – алгебраично.*

Отметим, что функция $H_{z_2}(z_1)$ также занимает центральную роль в работе Дона Загье [17]. В работе [3] (2017) Брингманн, Кейн, Лобрич, Оно и Ролен построили полярную гармоническую форму Мааса веса 2, $H^*_{N,z_2}(z_1)$, обобщающую функцию $H_{z_2}(z_1)$ на случай произвольной конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$. В наших обозначениях:

$$H_{N,z_2}(z_1) = -\Xi_N(z_1, z_2) + 2\pi i E^{\infty}_{2,N}(z_1)$$

и $H^*_{N,z_2}(z_1) = -\Xi_N(z_1, z_2)$. Напомним, что *гармонической формой Мааса целого веса* k называется вещественно-аналитическая функция f веса k: $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$, которая под действием модулярного преобразования преобразуются как модулярная форма веса k, в параболической точке имеет не более чем экспоненциальный рост (существует константа $C > 0$, такая что $f(z) = O(e^{Cy}), y \to \infty$) и аннулируется гиперболическим оператором Лапласа веса k:

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

В случае если такая функция f имеет полюса на верхней полуплоскости, f называется *полярной гармонической формой Мааса.* В работе [2] было показано, что функция $H^*_{N,z_2}(z_1)$ как функция переменной z_2 является полярной гармонической формой Мааса веса 0, и как функция переменной z_1 – полярной гармонической формой Мааса веса 2.

Кроме того, в работе [3] было получено непосредственное обобщение Теоремы 6 для случая произвольной конгруэнц-подгруппы Гекке $\Gamma_0(N)$:

Теорема 7. *(Bringmann, Kane, Lobrich, Ono, Rolen) Пусть $f = \sum_{n=h}^{\infty} a_n q^n$ – ненулевая мероморфная модулярная форма веса k относительно группы $\Gamma_0(N)$, такая, что $a_h = 1$. Пусть Φ_N – фундаментальная область группы $\Gamma_0(N)$. Определим дивизор полярной гармонической формы Мааса:*

$$f^{\mathrm{div}}(z_1) = \sum_{z_2 \in \Phi_N} e_{N,z_2} \operatorname{ord}_{z_2}(f)\ H^*_{N,z_2}(z_1).$$

Тогда
$$\Theta(f)=\frac{kf(z_1)}{4\pi\Im(z_1)}-f(z_1)f^{\mathrm{div}}(z_1).$$

Отметим также связь между модулярным ядром Коши и автоморфной функцией Грина или резольвентой ядра. *Автоморфной функцией Грина* $G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}$ *или резольвентой ядра* называется $\Gamma_0(N)$-инвариантная функция на $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$, гармоническая по обеим переменным и имеющая логарифмическую особенность на $D_N=\{(z,\gamma z)\mid\gamma\in\Gamma_0(N)\}$. Естественно предположить, что функция $G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(z_1,z_2)$ – есть ряд $\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)/\pm1}\log\left|\frac{z_1-\gamma z_2}{\bar{z_1}-\gamma z_2}\right|$, однако данная функция расходится как $\sum 1/n$. Поэтому в качестве автоморфной функции Грина была предложена следующая функция, введенная в [10]:

$$G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(z_1,z_2,s)=-2\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)/\pm1}Q_{s-1}\left(1+\frac{|z_1-\gamma z_2|^2}{2\Im(z_1)\Im(\gamma z_2)}\right),\quad(z_1,z_2\in\mathbb{H},z_2\neq\Gamma_0(N)z_1),$$

где $Q_{s-1}=\int_0^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\cosh u\right)^{-s}\,du\quad(t>1,s>0)$ – функция Лежандра второго рода. Более точно:

$$G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(z_1,z_2)=\lim_{s\to1}(G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(z_1,z_2,s)-e_s(z_1,z_2)).$$

Здесь функция $e_s(z_1,z_2)$ является некоторой комбинацией рядов Эйзенштейна и элементарных функций (см. [19]). Автоморфная функция Грина играет ключевую роль в работе [19] Бенедикта Гросса и Дона Загье, в которой авторы обнаружили замечательное соотношение между высотой классов дивизоров Хегнера на якобиане J_N модулярной кривой $X_0(N)$ и первой производной в точке $s=1$ L-функций определенных модулярных форм. В этой работе значение функции Грина было связано с высотой дивизоров степени 0 на J_N: если x, x' – две различные не параболические точки на $X_0(N)$ (z и z' представляют x, x' на $\mathbb{H}$), то (см. [19])

$$\lim_{s\to1}\left[G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(z,z',s)+4\pi E_N(w_Nz,s)+4\pi E_N(z',s)+\frac{\kappa_N}{s-1}\right]+C_N=$$
$$=\langle(x)-(\infty),\ (x')-(\infty)\rangle_{\mathbb{C}},$$

где $\kappa_N=-12N^{-1}\prod_{p|N}(1+1/p)^{-1}$, C_N – некоторая константа ([19], 241), $E_N(z,s)=\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\Im(\gamma z)^s$ и $w_N:z\to-1/Nz$ – инволюция на $X_0(N)$, и аддитивная по обеим переменным, симметричная форма $\langle\ ,\ \rangle$ определяет глобальное спаривание (the height pairing) на $J_N\times J_N$ над глобальным полем H, так что соответсвующая квадратичная форма $\langle a,a\rangle=\hat{h}(a)$ является канонической высотой Нерона-Тейта.

Модулярное ядро Коши $\Xi_N(z_1,z_2)$ является первообразной автоморфной функции Грина по одной из переменных. Мы представили разницу двух автоморфных регуляризованных функций Грина в виде регуляризованного интеграла (доказательство в работе [14]):

Теорема 8. *Пусть u, v, w – некоторые точки на верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$, Φ_N – фундаментальная область группы $\Gamma_0(N)$. Тогда*

$$\lim_{s\to 1} \left(G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(w,u,s) + 4\pi E^{\infty}_{0,N}(u) - G_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}(w,v,s) + 4\pi E^{\infty}_{0,N}(v)\right) =$$
$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Phi_N}^{reg} \left(\Xi_N(z,u)(u-\bar{u}) - \Xi_N(z,v)(v-\bar{v})\right) \overline{\Xi_N(z,w)}(\bar{w}-w)\ dzd\bar{z}$$

В заключение первой части отметим, что при помощи модулярной ядра Коши можно привести конструкцию дифференциальных форм на поверхности $Y_0(1)^2 \setminus T_N$ с заданными вычетами [14].

Часть 2

В этой части основным объектом изучения является модулярное ядро Коши на модулярной поверхности Гильберта, то есть дифференциальная 1-форма на поверхности Гильберта с простым полюсом вдоль дивизора Хирцебруха-Загье. В работах [5, 6] Ричард Борчердс построил подъем из эллиптических модулярных форм веса $1-n/2$ с полюсами в параболических точках в автоморфные формы относительно ортогональной группы $O(2,n)$ с известными нулями и полюсами вдоль дивизоров Хегнера, которые можно записать в виде бесконечного произведения, так называемого произведения Борчердса. В статье [7] Брунье, мотивированный обратным вопросом: верно ли, что всякий главный дивизор Хегнера получается как дивизор произведения Борчердса в случае $O(2;2)$ (модулярных форм Гильберта), построил ряд Пуанкаре $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ – функцию с логарифмической особенностью на дивизоре Хирцебруха-Загье. При помощи данной функции Брунье для всякого дивизора Хегнера H построил «обобщенное произведение Борчердса» и определил явно классы Черна дивизора H.

Конструкция рядов Пуанкаре-Брунье аналогична конструкция функции Грина для $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ [7]:

$$\Phi_n(z_1, z_2, s) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}_K^{-1} \\ ab-\mathrm{N}(\lambda)=n/D}} Q_{s-1}\left(1 + \frac{|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}{2\Im(z_1)\Im(z_2)n/D}\right).$$

В этой части мы рассмотрим интегральное представление для значений ряда Пуанкаре, соответствующего дивизору Хирцебруха-Загье T_n, в точках другого дивизора T_m в случае, когда $D = p$ простое, $p \equiv 1 \pmod 4$ и $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$. В этом случае дивизор T_m неприводим и изоморфен модулярной кривой $X_0(m)$. Мы рассматриваем такую задачу – определить ограничение ряда Пуанкаре-Брунье в терминах интеграла по фундаментальной области группы $\Gamma_0(m)$ от двух рациональных функций, модулярных ядер Коши в гильбертовом случае. Модулярное ядро Коши, соответствующее дивизору Хирцебруха-Загье, определяется аналогично модулярному ядру

Коши, данному в первой части. В случае модулярной поверхности Гильберта, ядро Коши $\Xi_{\mathrm{Hil},m}(z_1,z_2)(z_2-\bar{z}_2)$ является функцией, инвариантной относительно действия модулярной группы Гильберта, с полюсом первого порядка на дивизоре Хирцебруха-Загье T_m.

Определение 1. *Пусть $n\neq 0$,*

$$\mathcal{A}(n)=\left\{A=\begin{pmatrix}\theta & b\sqrt{D}\\ -a\sqrt{D} & \theta'\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathcal{O})|\ \theta\in\mathcal{O}_K,\ a,b\in\mathbb{Z},\ A^*=A';\ \det(A)=n\right\}$$

и $\mu_M=az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b$, где $M=\begin{pmatrix}\lambda & b\\ a & \lambda'\end{pmatrix}\in(\sqrt{D})^{-1}\mathcal{A}(n)$. Тогда

$$\Xi_{\mathrm{Hil},n}(z_1,z_2)(z_2-\bar{z}_2)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{M=\begin{pmatrix}\lambda & b\\ a & \lambda'\end{pmatrix}\\ ab-N(\lambda)=n/D}}\frac{(z_2-\bar{z}_2)}{\mu_M(z_1,z_2)\mu_M(z_1,\bar{z}_2)}.$$

Как и функцию Грина $\Phi_n(z_1,z_2)$, ядро Коши можно представить как сумму двух функций (как в [7]), $n/D\ \Xi_{\mathrm{Hil},n}(z_1,z_2)=\psi_n(z_1,z_2)+\upsilon_n(z_1,\overline{z_2})$, где функция $\upsilon_n(z_1,\overline{z_2})$ не имеет особенностей, а функция $\psi_n(z_1,z_2)$ имеет простой полюс на дивизоре T_n,

$$\upsilon_n(z_1,\overline{z_2})=\lim_{s\to 1}\sum_{M\in\mathcal{A}(n)/\sqrt{D}}\frac{n/D}{az_1+\lambda'}\frac{\overline{\mu_M(z_1,\bar{z}_2)}}{|\mu_M(z_1,\bar{z}_2)|^{2s}},$$

$$\psi_n(z_1,z_2)=-\lim_{s\to 1}\sum_{M\in\mathcal{A}(n)/\sqrt{D}}\frac{n/D}{az_1+\lambda'}\frac{\overline{\mu_M(z_1,z_2)}}{|\mu_M(z_1,z_2)|^{2s}}.$$

Рассмотрим некоторые свойства модулярного ядра Коши, связанного с дивизорами Хирцебруха-Загье, его связь с функцией $\omega_{\mathrm{Hil},n}(z_1,\bar{z}_2,k)$, введенной Доном Загье в работе [15] в связи с изучением поднятия Дои-Наганумы, и функцией Пуанкаре-Брунье $\Phi_m(z_1,z_2)$. В работе [15] Дон Загье доказал, что для любой пары фиксированных точек z_1 и z_2 следующая функция (по переменной τ)

$$\Omega_{\mathrm{Hil},n}(z_1,z_2,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\omega_{\mathrm{Hil},n}(z_1,\bar{z}_2,k)e^{2\pi in\tau}$$

является параболической формой веса k относительно действия группы $\Gamma_0(D)$ с характером $\varepsilon=(D/)$. Используя разложение функции $\Xi_{\mathrm{Hil},m}(z_1,z_2)(z_2-\bar{z}_2)$, можно получить аналогичный результат для «голоморфной части», $\upsilon_n(z_1,\overline{z_2})$, ядра Коши.

Напомним несколько необходимых обозначений (за деталями можно обратиться к [15], [7]).

Для всякой параболической точки D_1 группы $\Gamma_0(D)$ $(D_1D_2=D)$ можно определить r-ый ряд Пуанкаре веса 2 и индекса r как предел:

$$G_{r,2}^{D_1}(z)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{\substack{A\in\Gamma_{D_1}\backslash A_{D_1}\Gamma_0(D)\\ A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}}\chi_D(A_{D_1}^{-1}A)\frac{e^{2\pi ir/D_2Az}}{(cz+d)^2}\frac{\Im(z)^s}{|cz+d|^{2s}},$$

где χ_D – примитивный характер по модулю D, заданный символом Кронекера $x \mapsto \left(\frac{D}{x}\right)$, для $pD_1 + qD_2 = 1$, $A_{D_1} = \left(\begin{smallmatrix} D_2 & -p \\ D_1 & q \end{smallmatrix}\right)$ и $\Gamma_{D_1} = A_{D_1}\Gamma_0(D)A_{D_1}^{-1} \bigcap \Gamma_\infty$.

Для $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ и

$$\psi(D) = \begin{cases} \left(\frac{D_1}{D_2}\right)\sqrt{D_2} & \text{if } D_1 \equiv 1 \pmod 4 \\ -i\left(\frac{D_1}{D_2}\right)\sqrt{D_2} & \text{if } D_1 \equiv 3 \pmod 4 \end{cases},$$

определим следующую линейную комбинацию рядов Пуанкаре $G_{r,2}^{D_1}(z)$:

$$P_r(z) = \sum_{\substack{D_2|r, D_2>0 \\ D_1D_2=D}} \frac{\overline{\psi}(D_2)}{D_2^2} G_{r/D_2,2}^{D_1}(z).$$

Пусть $P_r(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} p_r(m)e^{2\pi imz}$ – разложение Фурье функции $P_r(z)$ (для $r > 0$ его можно найти в статье [15], §3, и для $r < 0$ в [7], §2.2). Заметим, что в случае отрицательного веса $r < 0$, ряд $P_r(z)$ не является голоморфным, но все еще инвариантен относительно действия группы $\Gamma_0(D)$. Имеется следующее Утверждение:

Утверждение 1. *Пусть* $\kappa_n(z_1) = i\pi^2 \sum_{a>0} H_a(0,-n)a^{-1}(\Im(z_1))^{-1}$.

Для $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H} - S(n)$, $\Im z_1 \Im z_2 > n/D$ *и* $n \neq 0$, *функция* $\widetilde{\psi}_n(z_1, z_2) = \psi_n(z_1, z_2) - \kappa_n(z_1)n/2D$, *имеющая простой полюс на* T_n, *имеет следующее представление в виде бесконечного произведения:*

$$\widetilde{\psi}_n(z_1, z_2) = \frac{d}{dz_1}\log\prod_{\nu>0,\nu'>0}\left|1 - e^{2\pi i(\nu z_1 + \nu' z_2)}\right|^{p_{-D\nu\nu'}(n)}.$$

Для голоморфной на $\mathbb{H}^2$ *функции* $\widetilde{\upsilon}_n(z_1, \overline{z_2}) = \upsilon_n(z_1, \overline{z_2}) - \kappa_n(z_1)n/2D$ *верно, что функция*

$$\Upsilon(z_1, z_2, \tau) = \sum_{n>0} \widetilde{\upsilon}_n(z_1, \overline{z_2})e^{2\pi in\tau} = \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}_K^{-1} \\ \nu>0,\nu'<0}} P_{-D\nu\nu'}(\tau)\ \frac{d}{dz_1}\log\left|1 - e^{2\pi i(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)}\right|$$

является параболической формой относительно действия группы $\Gamma_0(D)$ *относительно переменной* τ.

В работе [14] приводится доказательство следующей Теоремы:

Теорема 9. *Пусть* $D = p$ *и* $p \equiv 1 \pmod 4$, *тогда*

$$2\pi i\ \Phi_n(z,w)\,|_{T_m} = \frac{m}{D}\int_{F_{\Gamma_0(m)}}^{reg} \left(\Xi_{\mathrm{Hil},n}(z,w)\ dz + \Xi_{\mathrm{Hil},n}(w,z)\ dw\right)\Big|_{T_m} \overline{\Xi_m(z,u)}\, d\overline{z} + 2\pi iA,$$

где $F_{\Gamma_0(m)}$ – *фундаментальная область для конгруэнц-подгруппы Гекке* $\Gamma_0(m)$, $\Xi_{\mathrm{Hil},n}(z,w)|_{T_m}$ – *ограничение модулярного ядра Коши на дивизор Хирцебруха-Загье*

$$T_m = \bigcup_{M\in\mathcal{A}(m)} \left\{(z,w) \in \mathbb{H}^2;\quad w = -Mz\right\},$$

и $A = \pi/(2i)\sum\widehat{\lambda}$ – *константа, где* $\widehat{\lambda} = |\lambda|$, *если* $\lambda \in \mathfrak{d}_K^{-1}, \lambda\lambda' = -m/D$ *и* $|\lambda\Im z| \leq |\lambda\Im w|$ *или* $|\lambda\Im w| \leq |\lambda\Im z|$.

Список литературы

[1] T. Asai, M. Kaneko, and H. Ninomiya, *Zeros of certain modular functions and an application*. Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, **46**, 93-101. (1997)

[2] K. Bringmann and B. Kane, *A problem of Petersson about weight 0 meromorphic modular forms*. Research in Mathematical Sciences. (2016)

[3] K. Bringmann, B. Kane, S. Lobrich, K. Ono, L. Rolen, *On divisors of midular forms*, submitted for publication. (2017)

[4] K. Bringmann, B. Kane, S. Lobrich, K. Ono, L. Rolen, *Number theoretic generalization of the monster denominator formula*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, accepted for publication. (2017)

[5] R. E. Borcherds, *Automorphic forms on* $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ *and infinte products*. Invent. Math. **120**, 161-214 (1995).

[6] R. E. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent. Math. 132 (1998).

[7] J. H. Brunier, *Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch-Zagier divisors*. Invent. Math. **138**, 51-83 (1999).

[8] J. H. Bruinier, W. Kohnen, K. Ono, *The arithmetic of the values of modular functions and the divisors of modular forms*. Compositio Math. 140 (3) (2004).

[9] B. H. Gross, *Heegner points and the modular curve of prime level*. J. Math. Soc. Japan Vol. **39**, No. 2, 345-362 (1987).

[10] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Lecture Notes in Mathematics **1001**, Springer-Verlag, (1983).

[11] S. Lang, *Introduction to modular forms*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1995).

[12] N. Sakharova, *Convergence of the Zagier type series for the Cauchy kernel*. Cornell University. Series "Working papers by Cornell University". No. 1503.05503 (2015).

[13] N. Sakharova, *Modular Cauchy kernel corresponding to the Hecke curve*. Arnold Mathematical Journal, 4(3), 301-313 (2019).

[14] N. Sakharova, *The integral representation of automorphic Green's functions associated with Hirzebruch-Zagier divisors*. European Journal of Mathematics, 5(2), 528-539 (2019)

[14] Н. Сахарова, *Ряды Загье для функции Грина*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук. (2019).

[15] D. Zagier, *Modular forms associated to real quadratic fields*. Invent. Math. **30**. (1975).

[16] D. Zagier, *Traces des operateurs de Hecke*. Seminaire Delange-Pisot-Poitou , Expose' No. **23**. (1975-1976).

[17] D. Zagier, *Traces of singular moduli*. Motives, Polylogarithms, and Hodge Theory (Ed. F. Bogomolov and L. Katzarkov), Lect. Ser. **3** Intl. Press, Somerville, 209-244. (2002).

[18] D. Zagier, B. Gross, *On singular moduli*. J. reine Angew. Math., **355**, 191-220. (1985).

[19] D. Zagier, B. Gross, *Heegner points and derivative of L-series*. Invent. Math., **85**, 225-320. (1986).