# Гладкие взвешенные полные пересечения Фано большой коразмерности

Овчаренко Михаил

Пусть $X$ — гладкое многообразие Фано над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0. Обозначим через $i_X$ индекс Фано многообразия $X$, т.е. максимальное $i > 0$ такое, что канонический класс $K_X$ делится на $X$ в $\mathrm{Pic}(X)$. Хорошо известно, что выполнена оценка (см. [3, Corollary 3.1.15])

$$i_X \leq \dim X + 1,$$

причем при значениях $i_X$, близким к максимальным, можно дать следующую классификацию (см. [3, Chapter 3]):

- $X \simeq \mathbb{P}^{\dim X}$ при $i_X = \dim X + 1$,
- $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^{\dim X + 1}$ — квадрика при $i_X = \dim X$,
- $X$ является многообразием дель Пеццо (см. [3, Theorem 3.2.5]) при $i_X = \dim X - 1$.

В случае, когда $X$ — взвешенное полное пересечение, эту оценку можно уточнить следующим образом.

Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано размерности $n > 1$ и коразмерности $k = N - n$, не являющееся пересечением с линейным конусом (см. соответствующие определения в [1] и [2]).

Тогда верна следующая теорема.

**Теорема** ([5]). *Пусть $X$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда выполнено:*

- $k \leq n - i_X + 1$,
- *если $k = n - i_X + 1$, то $X$ является полным пересечением $(n - i_X + 1)$ квадрик в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$,*
- *если $k = n - i_X \geq 2$, то $X$ является полным пересечением $(n - i_X + 1)$ квадрик и кубики в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$.*

Это утверждение можно обобщить следующим образом. Обозначим через $(d_1, \ldots, d_k)$ степень полного пересечения $X$. Полезно ввести следующее

**Определение.** Пусть многообразие $X$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Назовем *отклонением* полного пересечения $X$ величину

$$r(X) = n - k + 1 - i_X,$$

а *квадратичной иррациональностью* $X$ — величину

$$s_2(X) = |\{i : d_i > 2\}|.$$

Тогда из теоремы мы получаем следующее утверждение.

**Следствие.** *Пусть $X$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда $r(X) \geq 0$ и $s_2(X) \leq r(X)$ при $r(X) = 0, 1$.*

Опишем геометрический смысл оценки $s_2(X) \leq r(X)$.

Рассмотрим проективный конус $X'$ над $X$ при вложении

$$\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N) \to \mathbb{P}(1, 1, a_0, \ldots, a_N),$$

и обозначим через $\widetilde{X}$ полное взвешенное пересечение в $\mathbb{P}(1, 1, a_0, \ldots, a_N)$, полученное как пересечение $X'$ с квадрикой. Нетрудно проверить, что $i_{\widetilde{X}} = i_X$ и $r(\widetilde{X}) = r(X)$ (подробнее см. [4, Corollary 2.8]).

Таким образом, если $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано размерности $n > 1$, то оно порождает *серию*

$$X_l \subset \mathbb{P}(1^{2l}, a_0, \ldots, a_N), \quad X = X_0, \quad i_{X_l} = i_X, \quad r(X_l) = r(X)$$

взвешенных полных пересечений, удовлетворяющих условиям выше.

Тогда оценка $s_2(X) \leq r(X)$ означает, что количество различных серий в смысле выше ограничено $r(X)$. Отсюда возникает

**Гипотеза.** *Пусть $X$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда $s_2(X) \leq r(X)$.*

На данный момент гипотеза доказана при некоторых ограничениях.

# Список литературы


[1] I. Dolgachev. Weighted projective varieties. “Lecture Notes in Math.”, 956, Springer-Verlag, Berlin (1982).

[2] R. Iano-Fletcher. Working with weighted complete intersections, Explicit birational geometry of 3-folds, 101–173. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 281, Cambridge Univ. Press (2000).

[3] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov. Fano varieties, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 47. Springer, Berlin (1999). Cambridge, 2000.

[4] V. Przyjalkowski, C. Shramov. Automorphisms of weighted complete intersections. arXiv:1905.12574.

[5] V. Przyjalkowski, C. Shramov. Fano weighted complete intersections of large codimension. arXiv:1906.11547.