Новый взгляд на доказательство теоремы Чена

Нестерова Елизавета Сергеевна
Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм

1. Введение

Данный доклад повторяет без доказательств курсовую работу автора 2019 года. В курсовой работе доказывается новым способом знаменитая теорема Чена о проунипотентном пополнении фундаментальной группы гладкого многообразия. Доказательство использует связь между монодромией плоских связностей и итерированными интегралами, а также алгебраические и категорные конструкции, возникающие при рассмотрении алгебр Хопфа и бар-комплексов.

2. Итерированные интегралы

Итерированные интегралы были введены независимо А. Н. Паршиным [2] и К.-Т. Ченом [1]. Введем некоторые обозначения. Пусть M — гладкое многообразие, $\Omega^\bullet_M$ — комплекс гладких форм на M с комплексными кэффициентами, $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega^1_M$. Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$ с координатой t. Пусть $\gamma\colon I \to M$ — кусочно гладкий путь на M. Обозначим через σ_n симплекс в единичном кубе I^n, задающийся по формуле

$$\sigma_n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \ \mid\ t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n\}\,.$$

Положим

$$\omega_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \omega_n = \mathrm{pr}_1^*\omega_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_n^*\omega_n \in \Omega^n_{M^n}\,.$$

Определение 2.1. *Итерированный интеграл* набора $\omega_1, \ldots, \omega_n$ по пути γ задается по формуле

$$\int\limits_\gamma \omega_1 \ldots \omega_n = \int\limits_{\sigma_n} (\gamma^n)^*(\omega_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \omega_n)\,,$$

где $\gamma^n\colon I^n \to M^n$.

3. Унипотентные алгебры Хопфа

Под алгеброй Хопфа мы будем подразумевать коммутативную алгебру Хопфа. Мы будем использовать стандартные свойства алгебр Хопфа, см., например, книгу Уотерхауза [3].

Пусть k — поле, A — (коммутативная) алгебра Хопфа над k с коумножением $\Delta\colon A \to A \otimes A$. Коумножение задает на A структуру комодуля над собой. Определим i-ую итерацию коумножения $\Delta^i\colon A \to A^{\otimes(i+1)}$ индуктивно следующим образом: $\Delta^1 = \Delta$ и

$$\Delta^i = (\mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^{i-1}\,, \qquad i \geqslant 2\,.$$

Так как операция Δ коассоциативна, то Δ^i не зависит от того, в каком именно месте стоит Δ в выражении $\mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}$.

Пусть V — векторное пространство над k, а $\rho\colon V \to A \otimes V$ — структура комодуля на V над A. Через V^A обозначим подпространство A-инвариантов в V, т.е. подпространство, состоящее из $v \in V$, для которых $\rho(v) = v \otimes 1$. Тогда V^A является подкомодулем в V.

Определение 3.1. Возрастающая *унипотентная фильтрация* N_iV, $i \geqslant 0$, комодуля V над A подкомодулями задается индуктивно следующим образом: $N_0V = V^A$ и N_iV, $i \geqslant 1$, является прообразом подпространтва

$$(V/N_{i-1}V)^A \subset V/N_{i-1}V$$

относительно естественного отображения $V \to V/N_{i-1}V$.

Определение 3.2. Комодуль V *проунипотентный*, если унипотентная фильтрация $N_\bullet V$ исчерпывающая, т.е. если $V = \bigcup_{i \geqslant 0} N_iV$. *Унипотентный* комодуль — это конечномерный проунипотентный комодуль.

Определение 3.3. Алгебра Хопфа A *проунипотентная*, если A является проунипотентным комодулем над собой.

Заметим, что $N_0A = k \cdot 1 \subset A$. Положим

$$\mathrm{prim}(A) = N_1A/N_0A\,.$$

Лемма 3.4. *Любое конечномерное предствление проунипотентной алгебры Хопфа A унипотентно.*

Пример 3.5. Пусть V — векторное пространство над k. Зададим структуру алгебры Хопфа на векторном пространстве $T(V)=\bigoplus_{i\geqslant 0}V^{\otimes n}$ следующим образом.

Чтобы различать внутреннее и внешнее тензорные произведения в $T(V)\otimes T(V)$, будем обозначать внутреннее тензорное произведение знаком “ $|$ ”, т.е. элемент $v_1\otimes\ldots\otimes v_n\in V^{\otimes n}\subset T(V)$ будет обозначаться через $(v_1|\ldots|v_n)$.

- Единица в $T(V)$ является образом $1\in k$ относительно естественного вложения $k=V^{\otimes 0}\subset T(V)$.
- Коединица $\epsilon\colon T(V)\to k$ равна естественной проекции на $k=V^{\otimes 0}\subset T(V)$.
- Антипод $\iota\colon T(V)\to T(V)$ определяется по формуле
$$(v_1|\ldots|v_n)\longmapsto(-1)^n(v_n|\ldots|v_1)\,,\qquad n\geqslant 1\,,\qquad \iota(1)=1\,.$$
- Умножение $m\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)$ определяется по формуле
$$(v_1|\ldots|v_n)\otimes(v'_1|\ldots|v'_{n'})\longmapsto\sum_{\tau\in S_{n,n'}}\tau(v_1|\ldots|v_n|v'_1|\ldots|v'_{n'})\,,\quad n,n'\geqslant 1$$
и $m\big((v_1|\ldots|v_n)\otimes 1\big)=m\big(1\otimes(v_1|\ldots|v_n)\big)=(v_1|\ldots|v_n)$, где $S_{n,n'}$ — множество (n,n')-тасовки.
- Коумножение $\Delta\colon T(V)\to T(V)\otimes T(V)$ определяется по формуле
$$(v_1|\ldots|v_n)\longmapsto 1\otimes(v_1|\ldots|v_n)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(v_1|\ldots|v_i)\otimes(v_{i+1}|\ldots|v_n)+(v_1|\ldots|v_n)\otimes 1\,,\qquad n\geqslant 1\,,$$
и $\Delta(1)=1\otimes 1$.

Лемма 3.6. *Алгебра Хопфа $T(V)$ проунипотентная.*

Замечание 3.7. Если алгебра Хопфа B является подфактором проунипотентной алгебры Хопфа A, то B тоже проунипотентна.

4. Алгебра Хопфа, связанная с комутативной dg-алгеброй

Пусть $A^\bullet$ — коммутативная dg-алгебра над k, и пусть $\alpha\colon A^\bullet\to k$ — аугментация, т.е. морфизм dg-алгебр. Для натуральных чисел $n\geqslant 1$ и i, $1\leqslant i\leqslant n$, определим отображения
$$d_i\ :\ (A^1)^{\otimes n}\longrightarrow(A^1)^{\otimes(i-1)}\otimes A^2\otimes(A^1)^{\otimes(n-i)}\,,$$
$$d_i(a_1|\ldots|a_n)=(a_1|\ldots|da_i|\ldots|a_n)\,,$$
$$\partial_i\ :\ (A^1)^{\otimes(n+1)}\longrightarrow(A^1)^{\otimes(i-1)}\otimes A^2\otimes(A^1)^{\otimes(n-i)}\,,$$
$$\partial_i(a_1|\ldots|a_{n+1})=(a_1|\ldots|a_i\cdot a_{i+1}|\ldots|a_{n+1})\,,\qquad 1\leqslant i\leqslant n-1\,,$$
$$\partial_0(a_1|\ldots|a_{n+1})=\alpha(a_1)(a_2|\ldots|\ldots|a_{n+1})\,,\qquad \partial_n(a_1|\ldots|a_{n+1})=\alpha(a_{n+1})(a_1|\ldots|\ldots|a_n)\,.$$
Пусть подпространство $Z(A^\bullet)\subset T(A^1)$ состоит из элементов $\sum_{n\geqslant 0}u_n\in T(A^1)$, для которых
$$d_iu_n=\partial_iu_{n+1}\in(A^1)^{\otimes(i-1)}\otimes A^2\otimes(A^1)^{\otimes(n-i)}$$
при всех $n\geqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Пусть подпространство $J(A^\bullet,\alpha)\subset Z(A^\bullet)$ линейно порождено элементами вида
$$df\,,\qquad (df|a_1|\ldots|a_n)+\alpha(f)(a_1|\ldots|a_n)-(fa_1|\ldots|a_n)\,,$$
$$(a_1|\ldots|a_i|df|a_{i+1}|\ldots|a_n)+(a_1|\ldots|fa_i|a_{i+1}|\ldots|a_n)-(a_1|\ldots|a_i|fa_{i+1}|\ldots|a_n)\,,$$
$$(a_1|\ldots|a_n|df)+(a_1|\ldots|fa_n)-\alpha(f)(a_1|\ldots|a_n)\,,$$
где $f\in A^0$, $n\geq 1$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Определение 4.1. Положим
$$H(A^\bullet,\alpha)=Z(A^\bullet)/J(A^\bullet,\alpha)\,.$$

Лемма 4.2.

(1) *Подпространство $Z(A^\bullet)$ в тензорной алгебре Хопфа $T(A^1)$ является подалгеброй Хопфа, подпространство $J(A^\bullet,\alpha)\subset Z(A^\bullet)$ является идеалом Хопфа, и на $H(A^\bullet,\alpha)$ возникает структура проунипотентной алгебры Хопфа.*

(2) *Имеется канонический изоморфизм*
$$\mathrm{prim}\big(H(A^\bullet,\alpha)\big)\simeq H^1(A^\bullet)\,.$$

5. Проунипотентное пополнение

Пусть Γ — группа.

Определение 5.1. *Проунипотентным пополнением* группы Γ называется пара (A, f), где A — проунипотентная алгебра Хопфа, а $f\colon \Gamma \to \mathrm{Spec}(A)(k)$ — гомомоморфизм групп, являющиеся начальным объектом в естественно определенной категории таких пар.

Проунипотентное пополнение существует для любой группы и единственно.

Лемма 5.2 (Критерий проунипотентного пополнения группы)**.** *Пусть A — проунипотентная алгебра Хопфа над k. Пусть $f\colon \Gamma \to \mathrm{Spec}(A)(k)$ — гомоморфизм групп. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ через f_γ обозначим гомоморфизм $A \to k$, соответствующий точке $f(\gamma) \in \mathrm{Spec}(A)(k)$. Тогда (A, f) является проунипотентным пополнением группы Γ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

(1) *линейное отображение над k*

$$\mathrm{prim}(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma, k)\,, \qquad a \longmapsto \big(\gamma \mapsto f_\gamma(a)\big)\,,$$

является изоморфизмом,

(2) *для любого гомоморфизма $\psi\colon \Gamma \to \mathrm{U}_d(k)$ существует матрица $P \in \mathrm{Mat}_d(A)$, для которой $P \otimes P = \Delta(P)$ и $f_\gamma(P) = \rho(\gamma)$ для всех элементов $\gamma \in \Gamma$.*

6. Теорема Чена

Пусть M — гладкое многообразие с отмеченной точкой $x \in M$. Коммутативная dg-алгебра де Рама $\Omega^\bullet_M$ вместе с аугментацией $x^*\colon \Omega^\bullet_M \to \mathbb{C}$ определяет проунипотентную алгебру Хопфа

$$H(M, x) = H(\Omega^\bullet_M, x^*)\,,$$

являющуюся подфактором в тензорной алгебре Хопфа $T(\Omega^1_M)$.

Пусть γ — петля на M, базированная в точке x. Итерированные интегралы вдоль петли γ задают линейный функционал

$$\int_\gamma\; :\; T(\Omega^1_M) \longrightarrow \mathbb{C}\,,$$

заданный по линейности формулой

$$(\omega_1|\ldots|\omega_n) \longmapsto \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_n\,, \qquad n \geqslant 0\,,$$

где, по определению, $\int_\gamma c = c$ для любого элемента $c \in \mathbb{C} = (\Omega^1_M)^{\otimes 0}$.

Лемма 6.1. *Для любого элемента $u \in Z(\Omega^\bullet_M) \subset T(\Omega^1_M)$ итерированный интеграл $\int_\gamma u$ зависит только от гомотопического класса петли γ.*

Из свойств итерированных интегралов и из леммы 6.1 следует, что возникает гомоморфизм групп

$$\pi_1(M, x) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(H(M, x)\big)(\mathbb{C})\,,$$
$$\gamma \longmapsto \big(t \mapsto \textstyle\int_\gamma t\big)\,.$$

Теорема 6.2 (Теорема Чена)**.** *Гомоморфизм групп*

$$\mathrm{iter}\; :\; \pi_1(M, x) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(H(M, x)\big)(\mathbb{C})$$

является проунипотентным пополнением группы $\pi_1(M, x)$.

Для доказательства теоремы Чена используется критерий из леммы 5.2, а также следующий результат.

Предложение 6.3. *Пусть N — верхнетреугольная матрица с коэффициентами из Ω^1_M с нулевой диагональю. Тогда для любой кусочно гладкой петли $\gamma \in \pi_1(M, x)$ монодромия расслоения с плоской связностью $(\mathbb{C}^n \times M, d - N)$ вдоль γ равна $\int_\gamma P$, где матрица P с коэффициентами из $T(\Omega^1_M)$ задается по формуле*

$$P = \mathrm{Id} + N + N^{\otimes 2} + \ldots + N^{\otimes i} + \ldots$$

Список литературы

[1] K.-T. Chen, *Iterated path integrals and generalized paths*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 935–938.

[2] A. N. Parshin, *On a certain generalization of Jacobian manifold*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **30** (1966), 175–182.

[3] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Mathematics, **66**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.