Д. Н. Тюрин

K-группы Милнора и дифференциальные формы:p–адический аналог отображения Блоха

На протяжении всего доклада под **кольцом** мы подразумеваем ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Через p мы обозначаем простое число, отличное от двух.

0.1. δ**–структуры.** Мы говорим, что кольцо R снабжено δ–структурой, при наличии отображения $\delta : R \longrightarrow R$, удовлетворяющего следующим свойствам:

- $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \left(\dfrac{x^p + y^p - (x+y)^p}{p}\right)$ (под выражением в скобках мы подразумеваем соответствующий многочлен с целыми коэффициентами от соответствующих переменных x и y)
- $\delta(xy) = x^p\delta(y) + y^p\delta(p) + p\delta(x)\delta(y)$
- $\delta(1) = \delta(0) = 1$

В этом случае пара также (R, δ) называется δ–**кольцом**. Странные, на первый взгляд, свойства отображения δ объясняются следующим образом: рассмотрим отображение $\varphi : R \longrightarrow R$, такое что $\varphi(r) = r^p + \delta(r)$ для любого элемента r кольца R. Легко проверить, что оно является корректным автоморфизмом кольца. Более того, φ также является так называемым **автоморфизмом Фробениуса** (напомним, это означает, что по модулю p автоморфизм представляет собой возведение в степень p). Заметим, что в случае отсутствия p-кручения понятия δ–структуры и автоморфизма Фробениуса равносильны — одно легко восстанавливается по другому. Однако в противном случае это, вообще говоря, не так.

Множество δ–колец $\{(R, \delta)\}$ образует категорию, в которой морфизмами между парами (R, δ) и (R', δ') являются гомоморфизмы колец $f : R \longrightarrow R'$, такие что $f \circ \delta = \delta' \circ f$ (отметим, что одно кольцо может предполагать наличие нескольких δ–структур, которым будут соответствовать разные объекты категории).

Предложение 0.1. *Пусть (R, δ) — δ–кольцо. Обозначим через $\widehat{R}$ соответствующее p-адическое пополнение $\varprojlim R/p^nR$ кольца R. Тогда существует и единственна δ-структура $\widehat{\delta}$ на $\widehat{R}$, такая, что естественный гомоморфизм $R \longrightarrow \widehat{R}$ индуцирует морфизм соответствующих δ–колец.*

Из Предложения 0.1 имеет место важное

Следствие 0.2. *Пусть $f : R_1 \longrightarrow R_2$ — гомоморфизм δ–колец и R_2 p–адически полно. Тогда f однозначно продолжается до гомоморфизма δ–колец $\widetilde{R}_1 \longrightarrow R_2$.*

Замечание 0.3. Заметим, что в приведенных рассуждениях вместо функтора δ–структуры можно было бы рассматривать функтор автоморфизма Фробениуса φ. Аналогичным образом, аргумент о "продолжении по непрерывности" можно использовать для любого функториального аддитивного автоморфизма — в дальнейшем мы часто будем им пользоваться уже для случаев p–адического пополнения абелевых групп.

Также заметим, что если в R отсутствует p-кручение, то несложно доказать (мы оставим это слушателю в качестве упражнения), что отсутствует оно и в $\widehat{R}$, и, как следствие, существование продолжения δ на $\widehat{R}$ равносильно существованию продолжения соответствующего автоморфизма Фробениуса φ.

0.2. Дифференциальные формы. Через Ω^1_R мы обозначаем R-модуль (абсолютных) дифференциальных форм кольца R. Напомним, что R-модуль Ω^1_R порожден элементами вида dr, $r \in R$, с соотношением линейности $d(r+s) = dr + ds$ и правилом Лейбница $d(rs) = rds + sdr$, где $r, s \in R$.

Далее, R-модуль Ω^n_R *дифференциальных форм степени* n определяется как внешняя степень

$$\Omega^n_R := \textstyle\bigwedge^n_R \Omega^1_R \,.$$

По определению, $\Omega^0_R = R$. Явным образом, Ω^n_R является фактором R-модуля $(\Omega^1_R)^{\otimes n}_R$ по R-подмодулю, порожденному элементами вида

$$dr_1 \otimes \ldots \otimes dr_i \otimes dr \otimes dr \otimes dr_{i+1} \otimes \ldots \otimes dr_{n-2} \,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant n-2$ и $r_1, \ldots, r_{n-2}, r \in R$.

Имеется гомоморфизм групп

$$d \;:\; R \longrightarrow \Omega^1_R \,, \qquad r \longmapsto dr \,,$$

определяющий также гомоморфизм групп

$$d \;:\; \Omega^n_R \longrightarrow \Omega^{n+1}_R \,, \qquad sdr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n \longmapsto ds \wedge dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n \,,$$

называемый *дифференциалом де Рама.* Так как $d^2 = 0$, то возникает комплекс

$$R \xrightarrow{d} \Omega^1_R \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^i_R \xrightarrow{d} \ldots \,,$$

называемый *комплексом де Рама* кольца R. Его группы когомологий называются *когомологиями де Рама* кольца R и обозначаются $H^i_{dR}(R)$, $i \geqslant 0$.

Сопоставление кольцу R его модуля дифференциальных форм Ω^n_R очевидно функториально по отношению к кольцу R.

Предложение 0.4. *Пусть (R, δ) — δ–кольцо и φ — соответствующий автоморфизм Фробениуса . Тогда на соответствующем модуле $\mathbb{Z}$–линейных дифференциальных форм Ω^1_R корректно определен групповой автоморфизм*

$$\frac{\varphi}{p} : \Omega^1_R \longrightarrow \Omega^1_R \,, \; \frac{\varphi}{p}(adb) = \varphi(a)(b^{p-1}db + d\delta(b)) \,,$$

который, является функториальным относительно категории δ–колец. Более того, построенный таким образом $\frac{\varphi}{p}$ является единственным функториальным групповым автоморфизмом на Ω^1_R, удовлетворяющим равенству

$p \cdot \frac{\varphi}{p} = \varphi$, *в котором правая часть представляет собой естественное действие* φ *на дифференциальных формах.*

Заметим теперь, что если w_1, w_2 —дифференциальные 1–формы, то имеют место равенства

$$\frac{\varphi}{p}(w_1) \wedge \varphi(w_2) = \frac{\varphi}{p}(w_1) \wedge p \cdot \frac{\varphi}{p}(w_2) = p \cdot \frac{\varphi}{p}(w_1) \wedge \frac{\varphi}{p}(w_2) = \varphi(w_1) \wedge \frac{\varphi}{p}(w_2)\,,$$

из которых следует, что действие $\frac{\varphi}{p}$ можно естественным образом продолжить на модуль $\Omega^k_R\,(k \geqslant 1)$, причем получившийся групповой автоморфизм также будет единственным функториальным удовлетворяющим равенству $p \cdot \frac{\varphi}{p} = \varphi$. Более того, непосредственно проверяется, что композиция $d \circ \frac{\varphi}{p} \circ d$ из R в Ω^2_R является нулевой, что дает нам равенства

$$d \circ \frac{\varphi}{p}(r_0 dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n) = d\big(\varphi(r_0) \wedge \ldots \wedge d\varphi(r_{n-1}) \wedge \frac{\varphi}{p}(dr_n)\big) =$$

$$d\varphi(r_0) \wedge \ldots \wedge d\varphi(r_{n-1}) \wedge \frac{\varphi}{p}(dr_n) = \frac{\varphi}{p} \circ d(r_0 dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n)\,.$$

Таким образом, $\frac{\varphi}{p}$ будет коммутировать с дифференциалом d.

Наконец, аналогичным образом для любого $m \geqslant k$ единственным образом задать функториальный групповой гомоморфизм $\frac{\varphi}{p^k} : \Omega^m_R \longrightarrow \Omega^m_R$, удовлетворяющий равенству $p^k \cdot \frac{\varphi}{p^k} = \varphi$, причем этот автоморфизм также будет коммутировать с дифференциалом d. Теперь, для наших дальнейших целей, по аналогии с p–адическим пополнением кольца R, мы хотим определить p-адическое пополнение модуля Ω^k_R. Вообще говоря, сделать это можно двумя разными способами: либо рассматривать направленный предел по фактор–модулям $\varprojlim\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega^k_R/p^n\Omega^k_R$, либо — направленный предел по фактор–кольцам $\varprojlim\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega^k_R/\Omega^k_{R_n}$, где $R_n := R/p^kR$. Однако, в силу того, что для произвольного идеала I кольца R имеет место равенство

$$\Omega^k_{R/I} = \Omega^k_R/\big(I\Omega^k_R + dI \wedge \Omega^{k-1}_R\big)\,,$$

мы получаем, что оба эти способа совпадают, и p–адическое пополнение модуля Ω^k_R имеет вид

$$\widehat{\Omega}^k_R := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Omega^k_R/p^n\Omega^k_R = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Omega^k_R/\Omega^k_{R_n}\,.$$

При этом очевидно, что так же как и Ω^k_R, $\widehat{\Omega}^k_R$ дает нам ковариантный функтор из категории колец в категорию абелевых групп.

Замечание 0.5. Заметим, что из равносильности этих двух способов сразу следует, что если $\widehat{R}$ является p–адическим пополнением кольца R, то имеет место изоморфизм $\widehat{\Omega}^k_R \cong \widehat{\Omega}^k_{\widehat{R}}$, индуцированный естественным отображением $R \longrightarrow \widehat{R}$. Также заметим, что в силу $\mathbb{Z}$–линейности модуля Ω^k_R его p-адическое пополнение $\widehat{\Omega}^k_R$ будет уже $\mathbb{Z}_p$–линейным. Наконец действие любого группового гомоморфизма (такого как дифференциал d или действие φ) продолжается по непрерывности с обычных дифференциальных форм на пополненные.

Теперь мы можем сформулировать более полный вариант Предложения 0.4:

Предложение 0.6. *Пусть выполнены все условия Предложения 0.4. Тогда для любых натуральных $m \geqslant k$ существует и единственнен функториальный групповой автоморфизм*

$$\frac{\varphi}{p^k} : \widehat{\Omega}^m_R \longrightarrow \widehat{\Omega}^m_R \,,$$

удовлетворяющий равенству $p^k \cdot \frac{\varphi}{p^k} = \varphi$, причем этот автоморфизм коммутирует с дифференциалом d.

0.3. K-группы Милнора. Обозначим через R^* мультипликативную группу обратимых элементов кольца R. Тогда *n-я K-группа Милнора* кольца R определяется как фактор-группа

$$K^M_n(R) := (R^*)^{\otimes n}/\mathrm{St}_n(R)\,.$$

Здесь $\mathrm{St}_n(R)$ — подгруппа в $(R^*)^{\otimes n}$, порожденная так называемыми *соотношениями Стейнберга*, являющимися элементами вида

$$r_1 \otimes \ldots \otimes r_i \otimes r \otimes (1-r) \otimes r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_{n-2}\,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant n-2$ и $r_1, \ldots, r_{n-2}, r, 1-r \in R^*$.

Наример, $K^M_0(R) = \mathbb{Z}$ и $K^M_1(R) = R^*$. Для случая $n \geqslant 2$ класс тензора $r_1 \otimes \ldots \otimes r_n$ в $K^M_n(R)$ обозначается через $\{r_1, \ldots, r_n\}$. Элементы K-групп Милнора часто называются *символами*. Групповой закон в $K^M_n(R)$ записывается аддитивно кроме случая $n = 1$.

Как и в случае дифференциальных форм, сопоставление K-группы Милнора $K^M_n(R)$ кольцу R функториально по отношению к кольцу R.

0.4. Отображение Блоха. Пусть, что $n \geqslant 0$ — натуральное число. Легко проверить, что имеется функториальный по отношению к кольцу R гомоморфизм групп

$$d\log \;:\; K^M_{n+1}(R) \longrightarrow \Omega^{n+1}_R\,, \qquad \{r_1, \ldots, r_{n+1}\} \longmapsto \frac{dr_1}{r_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dr_{n+1}}{r_{n+1}}\,,$$

причем образ гомоморфизма $d\log$ содержится в подгруппе $(\Omega^{n+1}_R)^{cl} \subset \Omega^{n+1}_R$. Применив к правой части естественный гомоморфизм $\Omega^{n+1}_R \longrightarrow \widehat{\Omega}^{n+1}_R$ мы получим гомоморфизм

$$K^M_{n+1}(R) \longrightarrow \widehat{\Omega}^{n+1}_R\,,$$

который для удобства также будем обозначать через $d\log$.

Перейдем теперь от категории δ–колец к ее полной подкатегории p–адически полных δ–колец (т.е. таких пар (R, δ) что естественный гомоморфизм $R \longrightarrow \varprojlim R/p^nR$ является изоморфизмом). Заметим, что любое p–адически полное кольцо обладает естественной структурой $\mathbb{Z}_p$–алгебры, в частности все натуральные числа, взаимно простые с p — обратимы в R (само p мы по умолчанию полагаем необратимым). Основное утверждение настоящего доклада заключается в том, что при определенной “подкрутке” гомоморфизма $d\log$ его можно в буквальном смысле проинтегрировать. Мы начнем с самого тривиального случая:

Предложение 0.7. *Существует функториальный относительно подкатегории p–адически полных δ–колец групповой гомоморфизм*

$$\log_\delta : R^* \longrightarrow R\,,$$ [1]

такой, что для соответствующих гомоморфизмов из R^* в $\widehat{\Omega}^1_R$ имеет место равенство

$$\Big(1 - \frac{\varphi}{p}\Big) \circ d\log = d \circ \log_\delta\ . \tag{0.1}$$

Построение $\log_\delta$ проводится в два “приема”. Для этого введем на множестве всех элементов кольца R новую операцию сложения “$\boxplus$”: для любых двух элементов r_1, r_2 положим

$$r_1 \boxplus r_2 = r_1 + r_2 + pr_1r_2\,.$$

Эта операция действительно заново превращает R в абелеву группу: так, в частности, обратным элементом к $r \in R$ является элемент $\dfrac{r}{pr-1}$. Отметим, что ключевую роль тут играет p–адическая полнота R, которая и гарантирует обратимость $pr - 1$. Теперь мы построим $\log_\delta$ как композицию двух отображений

$$R^* \longrightarrow (R, \boxplus)\,,\ r \longrightarrow \frac{\delta(r)}{r^p}$$

и

$$(R, \boxplus) \longrightarrow R, r \longrightarrow -\frac{1}{p}\log(1 + pr)\,.$$ [2]

Оба этих отображения действительно являются корректными гомоморфизмами: в первом случае это следует непосредственно из свойств δ–функций, во втором - из арифметических свойств ряда $\frac{1}{p}\log(1 + px)$ и равенства

$$(1 + pr_1)(1 + pr_2) = 1 + p(r_1 \boxplus r_2)\,.$$

Также оба этих отображения очевидно функториальны, а значит, функториальна и их композиция.

В явном виде, гомоморфизм $\log_\delta$ выглядит следующим образом:

$$\log_\delta(r) := -\frac{1}{p}\log\Big(1 + p\frac{\delta(r)}{r^p}\Big) = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\Big(\frac{p^{k-1}}{k}\Big)\frac{\delta(r)^k}{r^{pk}}\ . \tag{0.2}$$

Отметим, что коэффициенты бесконечной суммы в правой части p–адически стремятся к нулю, т.е. она корректно определяет элемент кольца R, в силу его p–адической полноты.

Наконец, предложение 0.7 обобщается на случай старших степеней. По аналогии с нашей предыдущей работой мы называем соответствующий интегральный гомоморфизм отображением Блоха и обозначаем буквой B.

[1]Здесь R^* рассматривается как группа по умножению, а R — соотвественно — по сложению.

[2]Здесь мы применяем к элементу r ряд $\frac{1}{p}\log(1 + px)$ из $\mathbb{Z}[[x]]$, чьи коэффициенты p–адически стремятся к нулю.

Предложение 0.8. *Для любого $n \geqslant 2$ существует и единственнен функториальный относительно категории p–адически полных δ–колец групповой гомоморфизм*

$$B_\delta : K_n^M(R) \longrightarrow \widehat{\Omega}_R^{n-1}/d\widehat{\Omega}_R^{n-2}\,,$$

такой, что для соответствующих гомоморфизмов из $K_n^M(R)$ в $\widehat{\Omega}_R^n$ имеет место равенство

$$\Big(1 - \frac{\varphi}{p^n}\Big) d\log \equiv d \circ B_\delta\,. \tag{0.3}$$

Отображение B_δ определяется по индукции: так, для случая n оно задается формулой

$$B_\delta\big(\{r_1,\dots,r_n\}\big) = \Big[\log_\delta(r_1)d\log\big(\{r_2,\dots,r_n\}\big)+(-1)^{n-1}B_\delta\big(\{r_2,\dots,r_n\}\big)d\log(r_1)-$$

$$-\log_\delta(r_1)dB_\delta\big(\{r_2,\dots,r_n\}\big)\Big]^3\,,$$

где в правой части стоит отображение B_δ, определенное для случая $n-1$

0.5. Цели и перспективы. Ценность построенного нами отображения B_δ проявляется при переходе к относительным вариантам вышеописанных функторов в случае нильпотентного расщепимого расширения δ–колец (под таковыми мы понимаем кольца вида $R = S \oplus I$, где I — нильпотентный идеал, чья δ–структура удовлетворяет соотношениям $\delta(S) \subset S$ $\delta(I) \subset (I)$). А именно, при наложении некоторых дополнительных условий (слабая 5–стабильность кольца R и отсутствие в нем нетривиального p–кручения, а также отношение $\delta(I) \subset I^2$), мы имеем все основания полагать что оно является изоморфизмом. Этот предполагаемый результат является p-адическим аналогом полученного нами ранее в статье "Относительные K-группы Милнора и дифференциальные формы расщепимых нильпотентных расширений" (совместно с С.О. Горчинским).

[3]Отметим, что хотя $B_\delta\big(\{r_2,\dots,r_n\}\big)$ и не является формой в прямом смысле этого слова, правая часть равенства не зависит от выбора его представителя, в силу замкнутости $d\log(r_1)$