Алексей Басалаев 10.10.19

Фробениусовы мн-зия

MSI

$A \to$ Frob alg

$\shortparallel$

Фроб. мн-зия

$\wr\wr$

Ког. теория поля

Триангул. категории

$B \to$

Примеры

В модель Ландау-Гинзбург

$$f_\sigma = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \sigma x_1 x_2 x_3$$

— особенность

$$\mathrm{Jac}(f) = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] / (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \partial_{x_3} f)$$

$$X_\sigma = \{ f_\sigma(x) = 0 \} \Big/ \{ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \mid \textstyle\sum x_i = 0 \}$$

Утв $H^*_{orb}(X_f) \cong \mathrm{Jac}(f)$

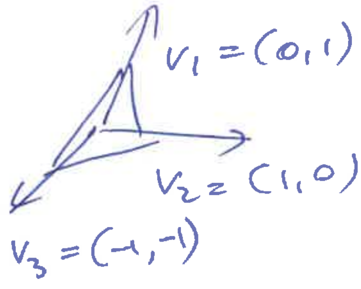
A, B модели

Первый пример

X – торическое Фано (не обязат. гладкое)

веер ⇝ мн-н Лорана / GW / особенность

пример $\mathbb{P}^2$ ⇝



$$\underbrace{x_1^0 x_2^1}_{v_1} + \underbrace{x_1^1 x_2^0}_{v_2} + \underbrace{\frac{1}{x_1 x_2}}_{v_3} := W$$

A, B модели

Второй пример

(пример неявно

1) $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ G

$$C_f := \{\partial_{x_1} f = \dots \partial_{x_N} f = 0\}$$

т.е. $x = 0$ – изолир. особенность

$\Rightarrow$ рассм f в окр-ти $x = 0$

$f = x_1^k$ $\quad$ Jac(f) = $\langle 1, x_1, \dots, x_1^{k-2} \rangle$

г) X_f "=" $\{f(x)=0\}/\tilde{G}$ — мн-во нулей во взвешенном проективном пр-ве

$H^*(X_f)$

$G_f := \{\lambda \in (\mathbb{C}^*)^N \mid f(\lambda x) = f(x)\}$

$j_f : x \mapsto (x_1 \zeta, x_2 \zeta, x_3 \zeta)$

$\tilde{G} = (G_f / \langle j \rangle)$

Но в реальности нас интересует не X_f, а X_{f^T}, где f^T построено по f

---

Фробениусовы алгебры

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ градуированные

~~Опр~~ ассоц. (супер)коммутативная алгебра $A/\mathbb{C}$ с невырожденным спариванием

$\eta : A \otimes_{\mathbb{C}} A \to \mathbb{C}$, условие

$\eta(a \circ b, c) = \eta(a, b \circ c) \quad \forall\, a, b, c \in A$

$$\eta(a,b) = (-1)^{|a||b|}\,\eta(b,a)$$

- ... -

Prop A - фробениусова алгебра неприводимая (irreducible)

а) $\exists!$ η с точностью до умн. на константу

б) размерность $A_{soc} = 1$

$A_{soc} = \{ v \in A \mid v$ - собств. в. для всех операторов $A\}$

Пример $Jac(f)$

$$\eta(\varphi,\psi) := \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(x)\,\psi(x)\,d^N x}{\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_N}}\right]$$

$$:= \frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(x)\psi(x)\,d^N x}{\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_N}}$$

$\Gamma = \{\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| = \varepsilon\}$ - 4 -

$$\operatorname{hess}(f) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$\eta([\varphi],[\psi]) = k^{\in \mathbb{C}}, \text{ если}$$

$$\varphi(x)\psi(x) = k \operatorname{hess}(f) \in J_{ac}(f)$$

Например

$$J_{ac}(x_1^{k}) = \mathbb{C}\langle 1, x_1, \dots, x^{k-2})$$

$$\operatorname{hess}(f) = k(k-1)x_1^{k-2}$$

$$\eta(1, x_1^{k-2}) = \frac{1}{k(k-1)} = \eta(x_1, x_1^{k-3})$$

$$\eta(1, x_1^{a}) = 0 \quad a < k-2$$

На самом деле, мы используем

$$\Omega_f : \Omega^N_{\mathbb{C}^N} / df \wedge \Omega^{N-1}_{\mathbb{C}^N} \cong J_{ac}(f)$$

В примере А-модели пр-во $H^*(X)$, а спаривание $\eta = \int \alpha \wedge \beta$

WDVV

X – кэлерово мн-зие, $N = \dim H^*(X)$

$H^*(X) = \mathbb{C}\langle e_1, \dots, e_N\rangle$

$$F_0^X(t^1, \dots, t^N) := \sum_{\beta \in H_2(X)}{}' \sum_k \frac{1}{k!} \langle t, \dots, t\rangle_{0,k,\beta}\, q^{\omega(\beta)}$$

$$t = t^1 e_1 + \dots + t^N e_N$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^i \partial t^j \partial t^\alpha} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\beta \partial t^k \partial t^l} = \qquad \forall \text{ фикс } 1 \le i, j, k, l \le N$$

$$= (\text{то же}, \ j \leftrightarrow k)$$

$\rightsquigarrow$ система уравнений $WDVV_{ijkl}$

<u>Пример</u> Пусть F – решение WDVV вида

$$\frac{1}{2} t_1^2 t_3 + \frac{\cancel{1}}{4} t_1 t_2^2 + t_2^4 f(t_3)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta} \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Какие из ур-ий WDVV $ijkl$ интересны? С единицами неинтересно — ~~нет~~ сводим к другим ур-ям

нет смысла. $ijkl$ 2233

$ikjl$ 2322

Подробнее, получаем что все системы WDVV эквив-ны ур-ю на f

$$f''' = 6ff'' + 9(f')^2$$

Решение $f = \frac{\pi i}{3} E_2(t_3)$

$$f^A = \frac{1}{(ct+d)^2} f\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{3c}{2(ct+d)}$$

Фробениусовы мн-зия

Определим $c_{ij}^k = \frac{\partial^3 F_0}{\partial t^i \partial t^j \partial t^\alpha} \eta^{\alpha k}$

WDVV $\Leftrightarrow$ c_{ij}^k — стр-ные константы ассоц. ком. умн-я

$$\frac{\partial}{\partial t^i} \circ \frac{\partial}{\partial t^j} = c_{ij}^k \frac{\partial}{\partial t^k}$$

Пусть

$F_0 \in \mathcal{O}(M)$

Тогда на T_tM задено умн-не

$\circ$, сперивние η и $e = \frac{\partial}{\partial t^1}$

Это „определение" фробениусове

мн-зия $(TM, \circ, \eta, e = \partial/\partial t^1)$

Многообразие M + умн в TM

$\downarrow$

F - мн-зие

$\downarrow$

Фроб мног