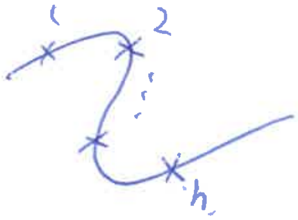
$\mathbb{P}^2 \supset$ рац. кривые степени d. Размерность этого пр-ва $3\cdot(d+1)-3-1$

3 многочлена $\deg = d$.   / проективность

автоморфизмы кривой.

тогда n_d = # рац. кривых через $3d-1$ точку общего положения. Это 0-циклы.

~~тогда~~ можно добавить

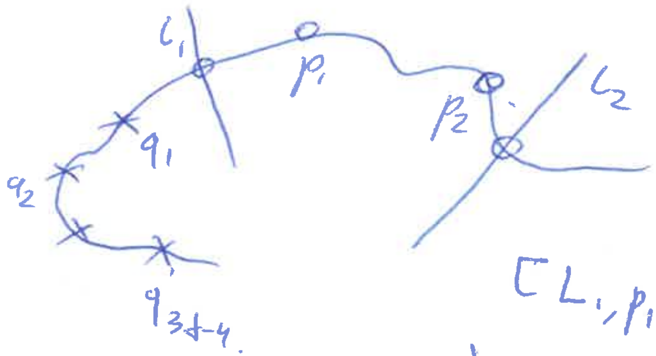


Каждая $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ пересекает в d точках $\Rightarrow$ каждая прямая умножает ответ на d.

Енумеративная задача такая: кривая пересекает $q_1, \dots, q_{3d-4}$ — точки.

l_1, l_2 — прямые

p_1, p_2 — точки.



$[L_1, p_1, L_2, p_2] = \lambda$

При generic λ ответ один и тот же.

$\lambda \to 0, 1, \infty \Rightarrow$ p_1 близко к l_1, p_2 близко к l_2

или p_1 близко к p_2, а l_1, l_2.

$$\sum_{\substack{3d_1-1=k\\ 3d_2-1=l}} (d_1 d_2)^2 n_{d_1} n_{d_2} = \sum_{\substack{3d_1-1=k\\ 3d_2-1=l}} (d_1)^3 d_2 n_{d_1} n_{d_2} + n_d$$

...

$1 \le k \le 3d-5$

$1 \le l \le 3d_2-5$

$n_d = \{1, 12, \dots\}$

Опр. стабильная рациональная кривая — вырожденная, непр. компоненты образуют дерево, отмеченные точки не особые и группа автоморфизмов дискретна.

$\mathcal{M}_{0,n} = \{n\text{-ки точек на } \mathbb{P}^1\} / \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1$ $\qquad \overline{\mathcal{M}}_{0,n} = \{$мн-во стаб. кривых рода 0 с n-отм. точками

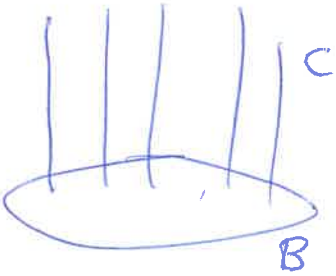
Пример: $\overline{M}_{0;3} = \{*\}$.

$\overline{M}_{0;4} = \mathbb{P}^1$

$\overline{M}_{0;5} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ несколько раз раздутое.

Построение: хотим: $\overline{C}_{0;n}$ — универсальная кривая.

$$\begin{tikzcd} \overline{C}_{0;n} \arrow[d] \\ \overline{M}_{0;n} \end{tikzcd}$$



C — семейство стаб. кривых с n различными номеров. отм. точками ✓ над B. в каждом слое.

Тогда существует единств. морфизм

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & \overline{M}_{0,n} \\ C \arrow[u] \arrow[r] & \overline{C}_{0,n} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

такая штука, если существует, то единственна, по универсальному св-ву.

Определим по индукции:

$$\overline{C}_{0;n+1} = Bl_\Delta \, \overline{C}_{0;n} \underset{\overline{M}_{0;n}}{\times} \overline{C}_{0;n}$$

$$\overline{M}_{0;n+1} = \overline{C}_{0;n}$$

процедуры такие:

это если при удалении точки пропадает стабильность.

Опр. пр-во модулей стабильных отображений:

$\overline{M}_{0;n}(X)$ — это пары

1) кривая C (полустабильная) с n отм. точками

2) $f: C \to X$, все компоненты $C_i \subset C$ т.ч. $f(C_i)$ — постоянны

C_i — стабильна.

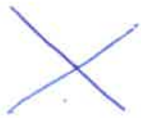
пр-во квадрик в $\mathbb{P}^2$ это $\mathbb{P}^5$.

Пример $\mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2)$ степени 2. имеет страту:

сдвоенные прямые

точка

гладкие — 

вырожденные 

Компактификация: всё без изменений, но для сдвоенной прямой надо точку взять и это будет дополнительным параметром

Орбифолдность:

Покроем $\mathcal{M}_{0;n}(\mathbb{P}^d)$ аффинные карты так:

$\beta \in H_2(X,\mathbb{C})$

фикс. кривую C с отм. точками

фикс. трансверсальный координатный крест.

Точки пересечения кривых с координатным крестом + образ ещё одной отмеченной точки задаст кривую однозначно.

$ev_i: \overline{\mathcal{M}}_{0;k}(X) \longrightarrow X$

отображение i-ой отм. точки

Пусть кривая из класса β пересекает циклы.

Определим:

$$\langle c_1,\dots,c_k\rangle_\beta = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;k,\beta}} \pi_*\left(ev_1^*(c_1)\wedge ev_2^*(c_2)\wedge\dots\wedge ev_k^*(c_k)\right).$$

$$\pi: \overline{\mathcal{M}}_{0;k,\beta}(X) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0;k}$$

забывание f и последующая регуляризация.

В $H^*\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ есть соотношения:

$\sum_{S_1\sqcup S_2=\{5,\dots,n\}}$ [] = $\sum_{S_1\sqcup S_2=\{5,\dots,n\}}$ []

+ ещё соотношение.

1,2,3,4 — фиксированные в компонентах точки

Ур-ие WDVV: