Бирациональные инварианты из симплектической геометрии

24.10.19 Лекция №5

Когомологическая теория поля и полинробота.

1 Аксиоматическое определение CoFT

$\forall g,n: 2g-2+n>0$ то $M_{g,n}\subset\overline{M}_{g,n}$ - компактный орбифолд, существует хорошая теория пересечений над $\mathbb{k}$ $\operatorname{char}\mathbb{k}=0$

$p: \overline{M}_{g,n+1}\to\overline{M}_{g,n}$ - забывание последней отм-ой точки

$q: \overline{M}_{g-1,n+2}\to\overline{M}_{g,n}$ - склеивание последних отм. точек
добавляет 1 нодальную точку, т.е. увеличивает алгебраический род на 1.

$r: \overline{M}_{g_1,n_1+1}\times\overline{M}_{g_2,n_2+1}\to\overline{M}_{g,n}$ $\quad g=g_1+g_2$, $n=n_1+n_2$

склеиваем последнюю пару отм точек

образы r для разных разбиений (g,n) в точности покрывают границу $\overline{M}_{g,n}-M_{g,n}$.

Опр (Манин) $\boxed{\text{CoFT с единицей}}$ Когомологическая теория поля $/\mathbb{k}$ с единицей это набор $(V,\eta,\mathbb{1},\Omega_{g,n})_{2g-2+n>0}$

- $V\in \mathrm{Vect}^{fd}(\mathbb{k})$
- $\eta: V\otimes V\to\mathbb{k}$ - скалярное пр-ие
  $\{e_1\dots e_n\}$ - базис в V, $\{e^i\}$ - двойственный базис
  $\Delta=\sum e_i\otimes e^i\in V\otimes V$ - диаг бивектор
- $\mathbb{1}\in V$ - выделенный элемент
- $\Omega_{g,n}\in H^*(\overline{M}_{g,n},\mathbb{k})\otimes(V^*)^{\otimes n}$
  набор тензоров, инв относительно S_n

удовлетворяющий следующим условиям

$$q^*(\Omega_{g,n}) = i_\Delta \Omega_{g-1,n+2} \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}, \mathbb{k}) \otimes (V^*)^{\otimes n}$$

$$r^*(\Omega_{g,n}) = i_\Delta(\Omega_{g_1,n_1+1} \otimes \Omega_{g_2,n_2+1})$$ соотношение клея

$$p^*(\Omega_{g,n}) = i_{\mathbb{1}}\, \Omega_{g,n+1}\,; \quad \eta = i_{\mathbb{1}}\, \Omega_{0,3}$$

[Т.к. $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,3}, \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}$, мы считаем, что $\Omega_{0,3} \in S^3(V^*)$] □

<u>Опр</u> когомологической теорией поля в роде 0 (с единицей) называется набор $(V, \eta, \mathbb{1}, \Omega_{0,n})$ удовлетворяющий тем же аксиомам. □

<u>Конструкция</u> CoFT^0 (с единицей) определяет структуру фробениусовой алгебры $(V, \eta, \circ)$ (с единицей).

Зададим $\circ : V \otimes V \to V$ формулой

$$\forall v, u, w \in V \qquad \eta(v \circ u, w) = \Omega_{0,3}(v, u, w)$$

Ассоциативность $\circ$ следует из равенства $r^* \Omega_{0,4} = i_\Delta \Omega_{0,3} \otimes \Omega_{0,3}$

<u>Напоминание</u>

Напомним, что структура формального фробениусова многообразия (V, η, H_i) это набор данных

- V - векторное пр-во $/\mathbb{k}$
- η - скалярное пр-ие на V
- $H_i^{\,i \geq 3}$ - набор симметричных полилинейных от-ий

$$H_i : \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{i} \to \mathbb{k}$$

Таких, что потенциал $\Phi(v) := \sum \frac{1}{n!} H_n(v, \ldots, v)$ удовлетворяет уравнению WDVV.

Фробениусово мн-зие (M, p, A) определяет структуру формального фробениусова мн-зия на $T_x M$.

Мы говорим, что (V, η, H_i) - формальная деф-ция фробениусовой алгебры (V, η, H_3).

Упражнение. Рассмотрим $CoFT^0(V, \eta, \mathbb{1}, \Omega_{0,n})$

Определим $H_n := \int_{[\overline{M}_{0,n}]} \Omega_{0,n} \in S^*(V^*)$

Проверьте, что аксиомы $CoFT^0$ для $\Omega_{0,n}$ (и тождество Кили в гомологиях $\overline{M}_{0,n}$) влекут аксиомы формального фробениусова мн-зия для набора операций H_n. Т.о. определена фробениусова деформация алгебры $(V, \eta, \circ)$.

Теорема (Манин) Рассмотрим фроб. алгебру $(V, \eta, \circ)$. Отображение $\Omega_{0,n} \mapsto H_n$ устанавливает биекцию

$$\{ CoFT^0 \text{ с ассоциированной фробениусовой алгеброй } (V, \eta, \circ) \}$$

$$\big\downarrow {\scriptstyle 1-1}$$

$$\{ \text{формальные деформации фроб. алгебры } (V, \eta, \circ) \}$$

② Полупростые CoFT и теорема Телемана

<u>Напоминание</u> Рассмотрим формальное фробениусово многообразие (V, η, H_n)

Продолжим η до постоянной метрики $p \equiv \eta$ на V

Рассмотрим связность Леви-Чивиты ∇ на TV

[в каноническной тривиализации $TV \cong V \times V$ связность ∇ очевидно имеет вид $d = \nabla$]

Обозначим $\circ$ умножение на векторных полях

$$v, w, u \in \underset{\substack{\| \\ \Gamma(TV) \\ \| \\ C^\infty(V)\otimes V}}{\mathcal{X}(V)} \qquad p(v, w \circ u) = A(v, w, u)$$

$$A = \partial_v \partial_w \partial_u \Phi.$$

Рассмотрим семейство связностей на TV

$$\nabla^{\hbar}_v w := \nabla_v w + \hbar^{-1} v \circ w$$

Тогда $(\nabla^{\hbar})^2 \equiv 0 \quad \forall \hbar \in \mathbb{C}^{\times}$. $\square$

<u>Опр</u> Фундаментальной системой решений $\nabla^{\hbar}$ называется отображение $\mathbb{C}^{\times} \to \Gamma(V, \operatorname{End} TV)$:

- $\forall \hbar \ \forall v \in V \quad \nabla^{\hbar} S^{\hbar}(\bar{v}) = 0$, где $\bar{v} \in \Gamma(V, TV)$ – постоянное векторное поле
- $\forall \hbar \quad S^{\hbar}\big|_{T_0 V} \equiv \mathrm{Id}$

По теореме существования и единственности определение корректно.

Определение Рассмотрим пр-во $\mathcal{E} = \mathcal{X}(V) \otimes \mathbb{C}[[t^{-1}]]$

на $\mathcal{E}$ задано спаривание $(\cdot,\cdot) : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \to \mathbb{C}[[t^{-1}]]$

$$v, \omega \in \mathcal{E} \qquad (v,\omega) := \eta(v(-t), \omega(t))$$

$\square$

Замечание $\forall\, v, \omega \in \mathcal{E}$ $\forall \varphi \in \mathcal{X}(V)$ выполнено

$$\mathcal{L}_\varphi (v,\omega) = (\nabla^t_\varphi v, \omega) + (v, \nabla^t_\varphi \omega).$$

Действительно, т.к. ∇-связность Леви-Чивиты, она уважает метрику $\mathcal{L}_\varphi(v,\omega) = (\nabla_\varphi v, \omega) + (v, \nabla_\varphi \omega)$.

Так как $(\nabla^t_\varphi v, \omega) + (v, \nabla^t_\varphi \omega) = (\nabla_\varphi v, \omega) + (t^{-1} v \circ \varphi, \omega) + (v, \nabla_\varphi \omega) + (v, t^{-1} \omega \circ \varphi) =$

$= (\nabla_\varphi v, \omega) + \eta(-t^{-1} v(-t) \circ \varphi, \omega(t)) + (v, \nabla_\varphi \omega) + \eta(v(-t), t^{-1} \omega(t) \circ \varphi) =$

$= \mathcal{L}_\varphi (v,\omega) + (-t^{-1} \eta(v(-t) \circ \varphi, \omega(t)) + \eta(v(-t), t^{-1} \omega(t) \circ \varphi) =$

$= \mathcal{L}_\varphi (v,\omega) + t^{-1}(-\eta(v(-t) \circ \varphi, \omega(t)) + \eta(v(-t), \omega(t) \circ \varphi)) =$

$= \mathcal{L}_\varphi (v,\omega) + t^{-1}(-A(v(-t), \varphi, \omega(t)) + A(v(-t), \omega(t), \varphi)) =$

$= \mathcal{L}_\varphi(v,\omega).$ $\square$

Следовательно, для люб. $v, \omega \in \mathcal{X}(V)$ выполнено

$$\mathcal{L}_\varphi (S(v), S(\omega)) = (\nabla^t_\varphi S(v), S(\omega)) + (S(v), \nabla^t_\varphi S(\omega)) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad (S(v), S(\omega)) \equiv (S(v), S(\omega))|_0 = \eta(v(0), \omega(0))$$

Т.е. для постоянных векторных полей $\bar{v}(p) \equiv v$

$$(S(\bar{v}), S(\bar{\omega})) \equiv \eta(v, \omega).$$

Опр CoFT $(V, \eta, \Omega_{g,n})$ полупроста, если ассоциированная фробениусова алгебра $(V, \circ, \eta)$ полупроста как алгебра $(V, \circ) \cong \oplus (\mathbb{C}, \times)$.

Th (Гипотеза Гивенталя/Теорема Телемана)

Для полупростой фробениусовой алгебры $(V, \circ_0, \eta)$

$(V, \circ_0) \cong \bigoplus (\mathbb{C}, \times)$ существует биекция

$$\left\{ \begin{array}{c|c} \text{CoFT} & \text{ассоциированная фроб. алгебра} \\ (V, \eta, \Omega_{g,n}) & \cong (V, \circ_0) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} S \in Id + \hbar^{-1} End(TV) \otimes \mathbb{C}[[\hbar^{-1}]] \\ \forall v, w \in V \ \ (S(\bar{v}), S(\bar{w})) = \eta(v, w) \end{array} \right\}$$

$\square$

Замечания

- Таким образом, ряд S — основной инвариант CoFT.
- В полупростом случае можно выбрать <u>канонические координаты</u> на V, позволяющие говорить о S^{ij}
- Если на ф-м мн-зии (V, η, H_i) задано эйлерово векторное поле, ряд S можно вычислить рекуррентно, начиная с $S^1 = \mathrm{Id}$. $\square$

<u>Опр</u> Рассмотрим пр-во $\mathcal{H} := \{ s \in \mathcal{X}(V) \otimes \mathcal{O}_V[[\hbar, \hbar^{-1}]] \mid \nabla^\hbar s = 0 \}$

Оператор S можно продолжить до отображения

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$$

Рассмотрим его обращение $J : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$, переводящее плоские векторные поля в постоянные сечения $\mathcal{H}$.

Пусть CoFT имела единицу $\mathbb{1}$. Определим J-функцию

$$J^\hbar_v := J^\hbar(\hat{\mathbb{1}}) \in V$$

<u>Замечание</u> Отображение J переставляет ∂_v в тривиальном расслоении $\mathcal{H}$ и $\nabla^\hbar_v$ в расслоении $\mathcal{E}$: $\partial_v \circ J = J \circ \nabla^\hbar_v$

Таким образом, $\forall v \in \mathcal{X}(V)$ выполнено

$$\hbar \partial_v J^\hbar_v = \hbar \partial_v J^\hbar(\hat{\mathbb{1}}) = J(\hbar \nabla^\hbar_v \hat{\mathbb{1}}) = J(v \circ \hat{\mathbb{1}}) = J(v)$$

Следовательно, $J^\hbar_v$ помнит всю информацию о квантовом дифференциальном уравнении $\nabla^\hbar S = 0$.

③ Теория Поля Громова-Виттена.

Рассмотрим многообразие X. (g,n), $\beta\in H_2(X)$ $\rightsquigarrow$ $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta}(X)$

$$\begin{array}{ccc}\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta}(X) & \xrightarrow{ev} & X^n \\ \downarrow \pi & & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n} & & \end{array}$$

X - проективное $\rightsquigarrow$ $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta}(X)]^{virt}\in H_{vdim(g,n,\beta)}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta},\mathbb{Q})$

$$vdim_{(g,n,\beta)}=2(n+(\dim_{\mathbb{C}}X-3)(1-g)+\int_\beta c_1(X))$$

<u>Замечание</u> Условие проективности можно существенно ослабить. Достаточно, чтобы X было компактным симплектическим мн-зием (Фукая-О-Ота-Оно построили $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta}(X)]$ в этом случае). Для простоты мы используем конструкцию Концевича-Манина CohFT, работающую для проективного случая. $\square$

<u>Опр</u> Пусть $V=H^{2*}(X,\mathbb{C})$, тогда $\forall\beta\in H_2(X)$ рассмотрим

$$\Omega_{g,n}^\beta\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{C})\otimes(V^*)^n$$

$$\Omega_{g,n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\pi_*(ev^*(\otimes\alpha_i)\cap[\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta}(X)]^{virt})\quad\square$$

Мы хотим придать смысл выражению $\sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}\Omega_{g,n}^\beta e^{(\int_\beta\omega)\cdot 2\pi i}$

Сходимость этой суммы не доказана, т.е. нужно перейти к другому полю, чтобы $q^\beta=e^{(\int_\beta\omega)2\pi i}$ были формальными переменными. В общем случае необходимо работать с кольцами Новикова, в случае X - мн-зия Фано подойдет полугрупповое кольцо

$$R=\mathbb{Q}[q^\beta\mid\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})]$$

Замечание Пусть X – фано. Тогда $\forall \alpha_i \in H^{2*}(X, \mathbb{C})$ сумма $\sum \Omega^{\beta}_{g,n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, q^{\beta}$ конечна $\Rightarrow \Omega_{g,n}(\otimes \alpha_i) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, R)$

Действительно, $\Omega^{\beta}_{g,n}$ зануляется как только

$$\sum \deg \alpha_i \neq 2\Big(n + (\dim_{\mathbb{C}} X - 3)(1-g) + \int_{\beta} c_1(X)\Big)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{\beta} c_1(X) \neq \frac{\sum \deg \alpha_i}{2} - n - (\dim_{\mathbb{C}} X - 3)(1-g)$$

Покажем, что лишь конечное число β может удовлетворять. Поскольку гр-па $H_2(X, \mathbb{Z})$ имеет конечное кручение, так что его можно игнорировать. Классы β, представленные стабильной кривой в H_2/H_2^{Tors}, образуют решётку. Класс $-c_1(X)$ лежит в келеровом конусе $\Rightarrow$ функционал $\beta \mapsto -\int_{\beta} c_1(X)$ положителен на замыкании конуса, порождённого эффективными β. Тогда лишь конечное число классов β удовлетворяет $\int_{\beta} c_1(X) < C$ для ~~каждого~~ каждого C □.

Th (Концевич – Манин) X – проективное Фано, $V = H^{2*}(X)$. $\forall g,n$ рассмотрим $\Omega_{g,n} := \sum_{\beta} \Omega^{\beta}_{g,n} q^{\beta} \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, R) \otimes (V^*)^{\otimes n}$. Тогда $(V, \eta, \mathbb{1}, \Omega_{g,n})$ – когомологическая теория поля$/R$, где η – спаривание Пуанкаре, $\mathbb{1} \in H^0(X)$ – класс единицы.

Замечание Можно (и нужно!) рассматривать все пр-во $H^*(X, \mathbb{C})$. Для этого надо определить $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-grad когомологические теории поля и форм. фр. м-ия

Мы закончим формулировкой следующей гипотезы:

<u>Гипотеза</u> (Дубровин) X – проективное мн-зие. $QH^{2*}(X)$ полупросто в общей точке $v \in H^{2*}(X)$ тогда и только тогда, когда категория $D^b(\mathrm{Coh}\, X)$ имеет полный исключительный набор □

<u>Замечание</u> Гипотеза Дубровина имеет следующую интерпретацию. Пусть X имеет зеркальную в смысле гомологической з.с. зеркало (Y, f)

$$X \longleftrightarrow (Y, f)$$

B	$D^b(\mathrm{Coh}(X))$	$MF(Y,f)$
A	$\mathcal{F}uk(X)$	$\mathcal{F}S(Y,f)$

Тогда MF и $\mathcal{F}S$ имеют полный исключительный набор одновременно (когда f имеет изолир. критические точки) $\Rightarrow$ $D^b\,\mathrm{Coh}(X)$ и $\mathcal{F}uk(X)$ имеют полный исключ. набор одновременно. С другой стороны, гипотетически

$$HH^\bullet(\mathcal{F}uk(X)) \cong QH^\bullet(X)$$

и существование полного искл. набора влечет полупростоту □

Это полностью спекулятивное замечание – реклама нашей дальнейшей деятельности.

<u>Замечание</u> Полупростота $QH^\bullet$ в общей точке $H^\bullet(X)$ известна для след. примеров:

* Проективные пр-ва, грассманианы, мн-зия флагов
* Проективные торические мн-зия
* Мн-зия с действием S^1, имеющим изолированные крит. точки

допускает вырождение $QH^\bullet(X)$ к полупростой ф. алгебре

Утв (<u>Байер</u>) Полупростота $QH^\bullet$ сохраняется при раздутии в точке

Определение Рассмотрим пр-во $\mathcal{E} = \Gamma(TV)\otimes\mathbb{C}[[t]]$

На $\mathcal{E}$ определено спаривание $(\cdot,\cdot): \mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\to\mathbb{C}[[t]]$

$v,w\in\mathcal{E}$ $\quad (v,w) := g(v(-t), w(t))$ □

Замечание $\forall v,w\in\mathcal{E}$ $\forall \varphi\in \mathcal{X}(V)$ выполнено

$$\mathcal{L}_\varphi(v,w) = (\nabla^t_\varphi v, w) + (v, \nabla^t_\varphi w)$$

Действительно, т.к. ∇ - связность Леви-Чивиты, она уважает метрику $\mathcal{L}_\varphi(v,w) = (\nabla_\varphi v,w)+(v,\nabla_\varphi w)$

По определению

$$(\nabla^t_\varphi v,w)+(v,\nabla^t_\varphi w) = (\nabla_\varphi v, w) + (t^{-1} v\circ\varphi, w) +$$

$$+ (v,\nabla_\varphi w) + (v, t^{-1} w\circ\varphi)$$

и искомое равенство следует из

$$(t^{-1} v\circ\varphi, w) = g(-t^{-1} v(-t)\circ\varphi, w(t)) =$$

$$= -t^{-1} g(v(-t)\circ\varphi, w(t)) = -t^{-1}A(\varphi, v(-t), w(t)) =$$

$$= (v, t^{-1} w\circ\varphi).$$ □

Следовательно, для пары $v,w\in \mathcal{X}(V)$ выполнено

$$\mathcal{L}_\varphi(S(v),S(w)) = (\nabla^t_\varphi S(v), S(w)) + (S(v), \nabla^t_\varphi S(w)) \equiv 0$$

$$\Longrightarrow (S(v),S(w)) \equiv (S(v),S(w))|_0 \in \mathbb{C}[[t]]$$

~~Sh(v),~~ Для постоянных векторных полей $v(p)\equiv v$ имеем

$$(S(v),S(w)) = (S(v),S(w))|_0 = g(v,w)$$