Бирациональные инварианты из симплектической геометрии.

Лекция №7 07.11.19.

Лева Суханов.

Формула локализации в квантовых когомологиях

① Эквивариантные когомологии и модель Картана

Напоминание. Пусть G - компактная группа Ли. Тогда

$\exists!$ стягиваемое топологич. пр-во $EG \in \{$пр-ва с действием группы $G\}$/гомотопич. эквивалентн. со свободным действием G

Классифицирующее пр-во $BG := EG/G$ ← сегодня все когомологии /$\mathbb{C}$

Кольцо когомологий BG $H^*_G := H^*(BG, \mathbb{C})$. □

Пример. $G = U(1) = S^1$. Окружность действует свободно на S^n

$\Rightarrow$ $EU(1) = S^\infty := \lim S^n$ (т.к. S^∞ стягиваемо)

и $H^*_{U(1)} = \mathbb{C}[x]$, $\deg x = 2$. □

Конструкция X - пр-во с действием группы G

Рассмотрим диагональное действие группы G на произведении $X \times EG$. Оно свободно

Обозначим $X_G := X \times_G EG = (X \times EG)/G$

[X_G (как и EG) определено с точностью до гом экв-ти

В частности, $\{pt\}_G = BG$, а для свободного действия G на X выполнено $X_G = (X/G) \times EG \sim X/G$] □

Опр Для пр-ва X с действием G обозначим

$$H^*_G(X) := H^*(X_G, \mathbb{C})$$

- эквивариантные когомологии X по G.

Это модуль над кольцом $H^*_G(\{pt\}) = H^*_G$. □

<u>Конструкция</u> (модель Картана)

Пусть G - компактная группа Ли, действующая на X

g - ее алгебра Ли, $(g)^*$ - двойственное пр-во

$S(g^*)$ - симметрическая алгебра от g^*

комплекснозначные формы

На прямой сумме $\Omega^\cdot(X) \oplus S^\cdot(g^*)$ задано действие G

- на первом слагаемом индуцировано с действия на X
- на втором индуцировано присоединенным пр-ием на g.

Рассмотрим $\Omega^*_G(X) := (\Omega^*(X) \oplus S^\cdot(g^*))^G$

Элемент $f \in \Omega^*_G(X)$ можно воспринимать как G-эквивариантное от-ие $f: g \to \Omega^\cdot(X)$.

полиномиальное

Зададим оператор $D: \Omega^*_G(X) \to \Omega^*_G(X)$ формулой

$$(Df)(\lambda) = d(f(\lambda)) - i_{\lambda^\#} f(\lambda) \quad \lambda \in g$$

где $\lambda^\#$ - векторное поле на X, заданное действием G

с подстановкой $i_{\lambda^*}: \Omega^*_G(X) \to \Omega^*_G(X)$

задана подстановкой в форму и внутренним произведением.

Формула Картана (и ~~...~~ инвариантность $f \in \Omega^*_G(X)$) влечет $D^2 \equiv 0$, D имеет степень 1 относительно градуировки $\deg(f) = n+2p$ для $f \in (\Omega^n \otimes S^p(g^*))^G$ □

<u>Пример</u>: Для $G = U(1)$, $g^* \cong \mathbb{R}\langle\lambda\rangle$, $S^\cdot(g^*) \cong \mathbb{R}[\lambda]$

$$\Omega^*_G(X) = (\Omega^*(X))^G[\lambda]$$

$$D(f) = df + \lambda i_{\lambda^*} f.$$ □

<u>Утв</u> (Картан) Существует естественный изоморфизм

$$H^*_G(X) \cong H^*(\Omega^*_G(X), D)$$ □

<u>Пример</u> $H^*_G \cong S(g^*)^G$, что для $U(1)$ отвечает $H^*_{U(1)} \cong \mathbb{C}[x]$

Опр Пусть X - компактное мн-зие с действием группы G. Определим интегрирование $\pi_*: \Omega^*_G(x) \to \Omega^*_G(pt)$ по ф-ле

$$\pi_*(\eta)(\lambda) := \int_X \eta(\lambda)$$ □

Замечание $\forall \eta \in \Omega^*_G(x)$ выполне $\pi_*(D\eta) = 0$

Действительно, по ф-ле Стокса зануляется $\int d\eta$, а слагаемое $\int_X i_* \eta$ зануляется по соображениям размерности. Таким образом, ~~вгинаем~~ определено $\pi_*: H^*_G(x) \to H^*_G$. □

Замечание В некомпактном случае π_* определено на подпространстве форм $\Omega^*_G(x)^{cmp}$ с компактным носителем. Для формы η, когомологичной форме с ~~не~~компактным носителем $\tilde{\eta}$, определим $\pi_* \eta := \pi_* \tilde{\eta}$ □

Пример Для действия S^1 на $\mathbb{C}$ вращениями рассмотрим инвариантную форму $\frac{dz}{z}$ с особенностью в нуле. Сглаживая ее, получаем форму η такую, что

$$\operatorname{Res}_0 \eta = 2\pi.$$

Тогда $D\eta = \alpha + \lambda \cdot 1$, где $\alpha \in (\Omega^2(x))^G$ - форма с компактным носителем и интегралом $\int_{\mathbb{C}} \alpha = \int_{|z|=1} \eta = \operatorname{Res}_0 \eta = 2\pi$.

Т.о. $\int_{\mathbb{C}} \mathbb{1} \cdot \lambda = -\int_{\mathbb{C}} \alpha = -2\pi$. □

Рассмотрим $\hat{H}^*_{u(1)}(X) := H^*_{u(1)}(X) \otimes_{\mathbb{C}[\lambda]} \mathbb{C}[\lambda^{-1}, \lambda]]$

Утверждается, что интеграл от единицы определен для $\hat{H}^*_{u(1)}(X)$. Более того, выполнено следующее рав-во

$$\hat{H}^*_{u(1)}(X) \cong \bigoplus_{F_i \in \mathcal{F}} H^*_G(F_i),$$

где $\mathcal{F}$ - мн-во компонент связности мн-ва неподвижных точек действия [каждое $F_i \in \mathcal{F}$ - мн-зие, т.к. линеаризация действия $h(1)$ на $T_f X$ дает локальные координаты на $F_i \ni f$]

<u>Идея док-ва</u> Принцип Майера-Виеториса позволяет свести задачу утверждения к частному случаю $F=\varnothing$. В этом случае G свободно

$$H^\bullet_G(X) \cong H(X/G) \text{ и после } \otimes \mathbb{C}[\lambda^{-1},\lambda]]$$

$\hat{H}^\bullet_G(X)$ зануляется. □

Таким образом, интегралы по X теоретически можно вычислить в терминах интегралов по F_i.

② Класс Эйлера и формула локализации

<u>Напоминание</u> Пусть группа Ли G действует на X, $E\to X$ - векторное расслоение. Эквивариантная структура на E это поднятие действия G на E, так что $\forall g\in G$ задано линейное преобразование $A_g: E|_x \to E|_{g(x)}$

Расслоение, естественно связанное с X (например, касательное) автоматически наделяются эквивариантной структурой □

<u>Опр</u> Пусть G действует на X, $E\to X$ эквивариантно. Рассмотрим $E_G := E\times_G EG \to X\times_G EG = X_G$. Для характеристического класса $c\in H^\bullet(BG,\mathbb{C})$

$$c^G(E) := c(E_G) \in H^\bullet(X_G,\mathbb{C}) = H^\bullet_G(X).$$ □

<u>Конструкция</u> Пусть $E\to X$ - эквивариантное расслоение. Рассмотрим связность ∇ на E, согласованную с действием G. Зададим $\tilde{\mu}\in\Gamma(\mathrm{End}\, E\otimes\mathfrak{g}^*)$ равенством $\forall s\in\Gamma(E), \forall\lambda\in\mathfrak{g}$ $\mathcal{L}_{\lambda^*}s - \nabla_{\lambda^*}s = \tilde{\mu}(\lambda)s$, где $\mathcal{L}_{\lambda^*}$ берется относительно действия λ^* на сечениях, заданным

заденной эквивариантной структурой" □

Утв Пусть $c \in H^*_G$ - характеристический класс, $\tau \in S^\cdot(\mathfrak{g}^*)$ - соответствующий симметрический полином. Тогда выполнено

$$C^G(E) = [\operatorname{Tr} \tau(F_\nabla + \widetilde{\mu})]$$

В частности, подставив в $C^G(E)$ значение $\lambda_i \equiv 0$ получаем обычный характеристический класс $c(E)$ □

Пример E - эквивариантное линейное комплексное расслоение над X с действием $G = S^1$, $F \in \mathcal{F}$ - компонента.

Тогда $\exists \beta_F \in (\mathfrak{u}(1))^*$ такое, что $\forall \lambda \in \mathfrak{u}(1)$ диффеоморфизм $\exp(\lambda) \in U(1)$ действует на $v \in E|_x$, $x \in F$ умножением на $e^{i\beta_F(\lambda)}$.

Тогда предыдущее утверждение дает равенство

$$e^{U(1)}(E)|_F = c_1(E|_F) + \beta_F \qquad □$$

Опр X-мн-зие с действием S^1, $F \in \mathcal{F}$, $\nu_F \to F$ - нормальн. расл.

Определим $e_F := e(\nu_F) \in H^*_{U(1)}(F) = H^*(F) \otimes H^*(BG)$ □

Утв класс e_F обратим в $\hat{H}^*_{U(1)}(F)$

Док-во Согласно принципу расщепления, можно считать

$$\nu_F = \bigoplus_i \nu_{F,i} \text{ - сумма линейных рассл-ий}$$

Пусть S^1 действует на $\nu_{F,i}$ с весом $\beta_{F,i}$. Тогда имеем

$$e_F = \prod_i (c_1(\nu_{F,i}) + \beta_{F,i})$$

Обозначим $e_F^0 := \prod_i \beta_{F,i}$. Тогда $e_F^0 \neq 0$ - действительно, если $\beta_{F,i} = 0$, то $\nu_{F,i}$ касается мн-ва неподвижных точек, а не нормально ему. Т.о. в $\hat{H}^*_{U(1)}(X)$

$$e_F = e^0_F \prod_i \left(1 + \frac{c_1(\nu_{F,i})}{\beta_{F,i}}\right).$$

Второй множитель обратим, т.к. $\frac{c_1(\nu_{F,i})}{\beta_{F,i}}$ нильпотентно □

4.6 Теорема Атьи-Ботта об абелевой локализации.

X - многообразие с действием $U(1)$, $\eta \in H^*_{U(1)}(X)$. Тогда в $\hat{H}^*_{U(1)}$ выполнено следующее равенство

$$\int_X \eta := \pi^X_* \eta = \sum_{F \in \mathcal{F}} \int_F \frac{\eta|_F}{e_F} \in \hat{H}^*_{U(1)}(X).$$

Док-во В предыдущем разделе, мы сформулировали, что

отображение $\sum_{F \in \mathcal{F}} (i_F)^* : \hat{H}^*_{U(1)}(X) \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} \hat{H}^*_{U(1)}(F)$ - изоморфизм.

Таким образом, $\forall \eta \in \hat{H}^*_{U(1)}(X)$ выполнено равенство

$$\eta = \sum_{F \in \mathcal{F}} (i_F)_* \frac{1}{e_F} (i_F)^* \eta .$$

Действительно, применение $\sum_{F \in \mathcal{F}} (i_F)^*$ к обеим частям приводит к тождеству $\sum_{F \in \mathcal{F}} (i_F)^* \eta = \sum_{F \in \mathcal{F}} (i_F)^* \eta$ после сокращения

$$(i_F)^* (i_F)_* = e_F .$$

Осталось применить к обеим сторонам равенства π^X_* и воспользоваться очевидным $(\pi^X_*) \circ (i_F)_* = \pi^F_* = \int_F$ ∎

(3) Эквивариантная теория Громова-Виттена

Пусть G действует на проективное мн-зие Фано X. Тогда определено индуцированное действие на $\overline{M}_{g,n,\beta}(X)$, для которого отображение ev эквивариантно. Виртуальный фундаментальный класс можно поднять до класса

$$[\overline{M}_{g,n,\beta}(X)]^{vir} \in H^G_*(\overline{M}_{g,n,\beta}(X))$$

$\Rightarrow$ определены эквивариантные инварианты Громова-Виттена

$$\langle \ldots \rangle^\beta_{g,n} : (H^*_G(X))^{\otimes n} \to H^*_G$$

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle^\beta_{g,n} := \int_{[\overline{M}_{g,n,\beta}(X)]^{vir}} ev^* (\otimes \alpha_i).$$

В этой ситуации Грабер и Пандхарипанде доказали формулу для $\int_{[\mathcal{M}_{g,n,\beta}(X)]^{vir}} \eta$, повторяющую ф-лу Атьи-Ботта.

<u>Пример</u>. Пусть X - проективное Фано, $U(1)$ действует на произведении $X\times\mathbb{CP}^1$ по ф-ле $\varphi:(x,v)\mapsto(x,e^{i\varphi}\cdot v)$. Пусть $L_{n,d}(X) := \overline{\mathcal{M}}_{0,n,(\beta,1)}(X\times\mathbb{P}^1)$ - пр-во модулей стабильных отображений $\mathbb{CP}^1\to X\times\mathbb{CP}^1$ бистепени $(\beta,1)$.

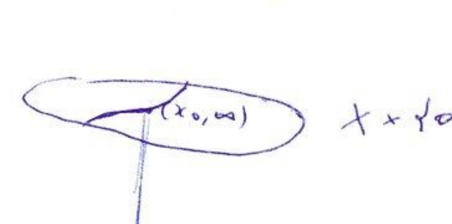
Нас интересуют компоненты связности многообразия неподвижных точек действия $U(1)$ на $L_{n,d}$ для $d=0,1$.

1) Для $d=0$ и элемента $u\in L_{n,0}(X)$ композиция

$\mathbb{CP}^1\xrightarrow{u} X\times\mathbb{CP}^1\xrightarrow{pr}\mathbb{CP}^1$ представляет класс 0 $\Rightarrow$ является постоянным отображением. Т.к. u является $U(1)$ инвариантным отображением, $pr\circ u(\mathbb{CP}^1)\in\{0,\infty\}$. Другими словами, мн-во неподвижных точек имеет вид

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X)\times\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X)\hookrightarrow L_{n,0} \qquad \Big| \qquad \bar u(x)=(u(x),0)$$
$$(u,v)\longmapsto(\bar u,\bar v) \qquad\qquad \bar v(x)=(v(x),\infty).$$

2) Для $d=1$ и $U(1)$ инвариантного элемента $u\in L_{n,1}(X)$ ~~ка~~ образ композиции $pr\circ u$ это в точности все $\mathbb{CP}^1$ (т.к. это инвариантное голоморфное от-ие степени 1). Тогда, ~~кака~~ образ u выглядит следующим образом:



т.е. $u(\mathbb{CP}^1)$ - объединение 3х компонент: кривой, лежащей в $X\times\{\infty\}$, кривой, лежащей в $X\times\{0\}$ и ~~кривой~~ кривой $\{x_0\}\times\mathbb{CP}^1$.

Другими словами мн-во неподвижных точек имеет вид

$$\bigsqcup_{\substack{n_1+n_2=n \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} \overline{\mathcal{M}_{0,n_1+1,\beta_1}(X)} \times \overline{\mathcal{M}_{0,n_2+1,\beta_2}(X)} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,n,\beta}(X)}$$

$\square$

④ Потенциал для эквивариантной теории на $X \times \mathbb{P}^1$ и новое доказательство для формулы ФСР связности ∇^q.

Напоминание X-проективное Фано, R-пополнение поле частных групповом кольце $H_2(X, \mathbb{Z})$. Теория Громова-Виттена на X определяет потенциал F на $H^{\cdot}(X, R)$

$$F(v) := \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} \langle \exp(v) \rangle_0^{\beta}\, q^{\beta}, \text{ где}$$

$$\langle \exp(v) \rangle_0^{\beta} := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \langle \underbrace{v, \dots, v}_{k} \rangle_{0,k}^{\beta}$$

Аналогично, эквивариантная теория Громова-Виттена на $X \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ определяет потенциал $\mathcal{F}$ на $H^{\cdot}_{U(1)}(X \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \hat{R})$, где $\hat{R} = R \otimes \mathbb{C}[q_0^{-1}, q_0]]$, где q_0 - базисный вектор в $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$.

Разложим $\mathcal{F}$ в ряд по переменной q_0:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} + q_0\, \mathcal{F}^{(1)} + q_0^2\, \mathcal{F}^{(2)} + \dots$$

По определению, $\mathcal{F}^{(i)} : H^{\cdot}_{U(1)}(X \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) \otimes R \to H^{\cdot}_{U(1)} \otimes R$

Таким образом, $\mathcal{F}^{(i)}$ раскладывается в ряд по базисным линейным функциям q_i, соответствующим базису в $H_2(X)$, переменной t (~~базисная~~ образующее в $H^{\cdot}_{U(1)} = \mathbb{C}[t]$) и функциям на $H^{\cdot}_{U(1)}(X \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) \to \mathbb{C}$.

Рассмотрим $H^*_{U(1)}(\mathbb{C}P^1) = \frac{\mathbb{C}[p,\hbar]}{p(p-\hbar)}$.

Спаривание Пуанкаре на $H^*_{U(1)}(\mathbb{C}P^1)$ имеет вид

$$\forall \varphi,\psi \in H^*_{U(1)}(\mathbb{C}P^1) \qquad \langle\varphi,\psi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varphi\cdot\psi}{p(p-\hbar)}\,dp$$

Переходя к $\hat{H}^*_{U(1)}(\mathbb{C}P^1)$ введем новые координаты t, τ на $\hat{H}^*_{U(1)}(\mathbb{C}P^1)$, отвечающие базису $\left\{\frac{p}{\hbar}, \frac{\hbar-p}{\hbar}\right\}$

$$\varphi = t(\varphi)\frac{p}{\hbar} + \tau(\varphi)\frac{\hbar-p}{\hbar}$$

Спаривание Пуанкаре в этих координатах принимает вид

$$\langle (t,\tau), (t',\tau')\rangle = \frac{tt'-\tau\tau'}{\hbar}$$

(таким образом $\hat{H}^*_{U(1)}(\mathbb{C}P^1)$ со внешним пр-ем и спариванием Пуанкаре - пример полупростой ~~Фробениусовой~~ алгебры).

По ф-ле Кюннета для эквивариантных когомологий, имеем ~~$H^*_{U(1)}(X\times\mathbb{C}P^1)$~~ что функции на $H^*_{U(1)}(X\times\mathbb{C}P^1)$ порождены $t_1\dots t_k, \tau_1,\dots,\tau_k$ для набора функций $p_1,\dots,p_k$, порождающих функции на $H^*(X)$ (и отвечающих базису $T_1,\dots,T_k$).

Таким образом $F^{(i)}$ - ряд от переменных

t_i, τ_i, q_i и $\hbar$.

Ур Формула локализации, примененная к $L_{n,d}(X)$ для случаев $d=0,1$, позволяет вычислить $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$ в терминах теории Громова-Виттена на многообразии X. А именно, выполнено

1) $\mathcal{F}^{(0)} = \dfrac{F(t,q)-F(\tau,q)}{\hbar}$

2) $\hbar^2 \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \tau^\alpha \partial t^\beta}\right) = \left(S^{-\hbar}(\tau), S^{\hbar}(t)\right)$

Напомним, что F – потенциал теории Громова-Виттена для X, $S^\hbar$ – фундаментальная система решений для связности $\nabla^\hbar$, определенная
$$S^\hbar(\alpha) := \alpha - \sum_{j=0}^{k} \langle\langle \frac{\alpha}{\hbar+\psi}, T_j \rangle\rangle T^j$$

<u>Идея док-ва</u> каждое из этих равенств сразу следует из ф-лы Атьи-Ботта, примененной к $L_{n,0}(X)$ и $L_{n,1}(X)$ соответственно. Для двух компонент мн-ва неподвижных точек $L_{n,0}(X)$ класс Эйлера равен $\pm\hbar$, а класс Эйлера единственной ~~компоненты~~ мн-ва неподвижных точек $L_{n,1}(X)$ равен $\hbar^2(\hbar+\psi(0))(\hbar-\psi(\infty))$, где $\psi(0)$ – первый класс Черна <u>линейного</u> расслоения над $\overline{M}_{0,n_1+1,\beta_1}(X)$, соответствующего касательному пр-ву к кривой в отмеченной точке $(x_0,0)$,

а $\psi(\infty)$ – первый класс Черна линейного расслоения над $\overline{M}_{0,n_2+1,\beta_2}(X)$, соответствующего касат. пр-ву к кривой в точке (x_0,∞). Эта формула для класса Эйлера – частный случай общей формулы, доказанной Грабером-Пандхарипанде. Идея этого вычисления следующая. Пусть Z в $\overline{M}_{g,n,\beta}(X\times\mathbb{CP}^1)$ задано как локус кривых специального вида. В таком случае, V расщепляется в прямую сумму линейных расслоений, которые отвечают покомпонентным деформациям особой кривой. В свою очередь каждое из этих линейных расслоений отождествляется с касательным пространством к деформируемой компоненте. Итоговая формула получается из

$$e(F) = \prod_i \left(c_1(V_{F,i}) + \beta_{F,i}\right)$$

□

<u>Замечание</u> Определение квантового умножения влечет следующее диф. ур-ие на $\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t_\alpha \partial t_\beta}$:

$$\begin{cases} -\hbar \, \partial/\partial \tau_\gamma \, \Phi = p_\gamma(\tau) * \Phi \\ \hbar \, \partial/\partial \tau_\gamma \, \Phi^* = p_\gamma(\tau) * \Phi^* \end{cases}$$

где $p_\gamma(\tau), p_\gamma(t) \in R[\hbar]$ - формулы для перехода к старому базису в $H^*_G(X \times \mathbb{CP}^1) \otimes R$. Из этой системы выводится равенство

$$D^\hbar S(\alpha) \equiv 0.$$

Таким образом, мы передоказали, что S-ФСР для $D^\hbar$ не используя Топологическую Рекурсию и объяснив геометрический смысл параметра.

□