Бирациональные инварианты из симплектической геометрии

31.10.19 Лекция №6

# J-функция Гивенталя

## ① Вычисление S-матрицы квантовых когомологий

<u>Напоминание</u> CohFT $(V,\eta,\Omega_{0,n}) \rightsquigarrow J_V \in \mathcal{X}(V)[[\hbar^{-1}]]$

$X$ — проективное Фано $\rightsquigarrow QH^\bullet(X)$ — теория поля

<u>Опр</u> $J_X := J_{QH^\bullet(X)} \in \mathcal{X}(H^\bullet(X,\mathbb{R}))[[\hbar^{-1}]]$ — J-функция Гивенталя □

Начнем с вычисления $S\in\Gamma(\mathrm{End}\,TV)[[\hbar^{-1}]]$ — Ф.С.Р.

<u>Обозначения</u> $\{T_0,\dots,T_m\}$ — базис в $H^\bullet(X,\mathbb{C})$, такой, что:

$T_0=1\!\!1\in H^0(X,\mathbb{C})$, $T_1,\dots,T_p$ — базис в $H^2(X,\mathbb{C})$, $\forall\beta\in H_2^{eff}(X,\mathbb{Z})$ $\langle T_i,\beta\rangle>0$

$T_i$ — однородные элементы в $H^\bullet(X,\mathbb{C})$

$\{T^i\}$ — базис в $H^\bullet(X,\mathbb{C})$, двойственный $\{T_i\}$ относительно двойственности Пуанкаре: $\eta(T_i,T^j)=\int_{[X]}T_i\wedge T^j=\delta_{ij}$ □

<u>Опр</u> • $\forall i$ рассмотрим $L_i\to\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ — касательное пр-во к $i$-ой отмеченной точке

$\psi_i := c_1(L_i)\in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n},\mathbb{C})$

• Для набора $d_1,\dots,d_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ определим $\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ гравитационные корреляторы $(H^\bullet(X,\mathbb{C}))^{\otimes n}\to\mathbb{Q}$

$$\langle\psi^{d_1}\alpha_1,\dots,\psi^{d_n}\alpha_n\rangle_{0,\beta}:=\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}\bigwedge_{i=1}^{n}\psi_i^{d_i}\wedge\pi_*\left((ev^*\otimes\alpha_i)\cap[\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X)]^{vir}\right)$$

• Нас интересует следующая производящая функция (формальный ряд)

$$\begin{tikzcd}\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X) \arrow[r, "ev"] \arrow[d, "\pi"] & X^n \\ \overline{\mathcal{M}}_{0,n} & \end{tikzcd}$$

$$\langle\langle\psi^{d_1}\alpha_1,\dots,\psi^{d_n}\alpha_n\rangle\rangle(v):=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}\frac{1}{k!}\langle\psi^{d_1}\alpha_1,\dots,\psi^{d_n}\alpha_n,\underbrace{v,v,\dots,v}_{k}\rangle$$

<u>Замечания</u> 1) Очевидно, $\Phi=\langle\langle 1\rangle\rangle$, $\partial_v\langle\langle\psi^{d_1}\alpha_1,\dots,\psi^{d_n}\alpha_n\rangle\rangle=\langle\langle\psi^{d_1}\alpha_1,\dots,\psi^{d_n}\alpha_n,v\rangle\rangle$

2) В теории Громова-Виттена выполнено следующее соотношение

$$\langle\psi^{d_1}\alpha_1,\dots,\psi^{d_n}\alpha_n\rangle_{0,\beta}=\sum\langle\psi^{d_1-1}\alpha_1,\prod_{i\in S_1}\psi^{d_i}\alpha_i,T_e\rangle_{0,\beta_1}\langle T^e,\psi^{d_2}\alpha_2,\psi^{d_3}\alpha_3,\prod_{i\in S_2}\psi^{d_i}\alpha_i\rangle_{0,\beta_2}$$

где сумма берется по всем $0\le e\le m$, разбиениям $\beta=\beta_1+\beta_2$ и $S_1\sqcup S_2=\{4,\dots,n\}$

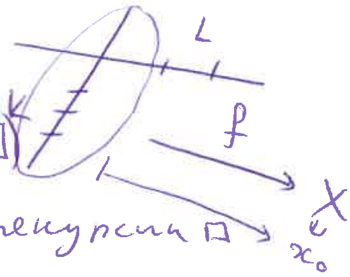
Это соотношение называется <u>соотношением топологической рекурсии</u>. Оно доказывается след. образом

$\pi: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta) \to \overline{\mathcal{M}}_{0,3} = \{pt\}$ — „забывание отм. точек и стягивание нестабильных комп.",

$\mathcal{Z}_1' \to \overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ — прямая. Тогда $\pi^*\mathcal{Z}_1' - \mathcal{Z}_1$ имеет вид

$$\pi^*\mathcal{Z}_1' - \mathcal{Z}_1 = -\sum_{S_1\cup S_2=\{4..n\}} D_{(\{1\}\cup S_1 | \{2,3\}\cup S_2)}, \text{ где}$$

$D_{(K,L)}$ — замыкание мн-ва стабильных отоб-ий $f$, область определения которых содержит точки из $K$ на одной компоненте, на которой $f$ константа, и из $L$ на другой




Умножая рав-во на $\prod_i \psi^{d_i} \wedge ev^*(\otimes\alpha_i) \cap [\mathcal{M}_{g,n,\beta}(X)]$ получаем соотношение топологической рекурсии □

3) Соотношение топологической рекурсии влечёт рав-во

$$\langle\langle \psi^{d_1+1}\alpha_1, \psi^{d_2}\alpha_2, \psi^{d_3}\alpha_3\rangle\rangle = \sum_{i=0}^m \langle\langle \psi^{d_1}\alpha_1, T_i\rangle\rangle \langle\langle T^i, \psi^{d_2}\alpha_2, \psi^{d_3}\alpha_3\rangle\rangle$$

Достаточно раскрыть скобки по определению (очевидное упр-ие). □.

<u>Утв</u> Векторные поля $S_i := T_i - \sum_{j=0}^m \langle\langle \frac{T_i}{\hbar+\psi}, T_j\rangle\rangle T^j$ удовлетворяют уравнению $\nabla^\hbar S_i \equiv 0$ $\forall i$, $\forall \hbar\in\mathbb{C}^*$

<u>Док-во</u> $T_i * S_j = T_i*T_j - \sum_{k=0}^m \langle\langle \frac{T_j}{\hbar+\psi}, T_k\rangle\rangle T_i * T^k = \circledast$ Перепишем это, пользуясь

$$\Phi = \langle\langle 1\rangle\rangle \Rightarrow T_i*T_j = \sum_{e=0}^m \partial_{T_i}\partial_{T_j}\partial_{T_e}\langle\langle 1\rangle\rangle T^e = \sum_{e=0}^m \langle\langle T_i,T_j,T_e\rangle\rangle T^e$$

$$\circledast = \sum_{e=0}^m \langle\langle T_i,T_j,T_e\rangle\rangle T^e - \sum_{k,e=0}^m \langle\langle \frac{T_j}{\hbar+\psi}, T_k\rangle\rangle\langle\langle T_i, T^k, T^e\rangle\rangle = \sum_{e=0}^m \langle\langle T_i,T_j,T_e\rangle\rangle T^e -$$ пользуясь TRR

$$- \sum_{e=0}^m \langle\langle \frac{\psi T_j}{\hbar+\psi}, T_i, T_e\rangle\rangle T^e = \sum_{e=0}^m \langle\langle T_i, T_j - \frac{\psi T_j}{\hbar+\psi}, T_e\rangle\rangle T^e = \sum_{e=0}^m \hbar \langle\langle T_i, \frac{T_j}{\hbar+\psi}, T_e\rangle\rangle T^e =$$

$= -\hbar\nabla_{y_i} S_j$ [тут $v = \sum T_i y_i$, $y_i$ — координаты вдоль напр. $T_i$]

Т.о. $\forall i$ $\nabla_{y_i} S_j + \hbar^{-1} T_i * S_j = 0 \Leftrightarrow \forall i\ \nabla^\hbar_{y_i} S_j \equiv 0 \Leftrightarrow \nabla^\hbar S_j \equiv 0$. □

Оператор $S$, заданный $S(\alpha) := \alpha - \sum_{j=0}^{m} \langle\langle \frac{\alpha}{\hbar+\psi}, T_j \rangle\rangle T^j$ – фунд. системе решений

② Структурная связность

Напоминание $(V, g, A)$ – фробениусово мн-зие, $E$ – эйлерово в. поле

$\hat{V} := V \times \mathbb{C}P^1_\hbar \xrightarrow{\pi} V$, $\hat{T} := \pi^* TV \to \hat{V}$

$\mathcal{X}(\hat{V})$ порождено поднятиями $\hat{Y}$ полей $Y \in \mathcal{X}(V)$ и $\partial/\partial\hbar$

$d_0 \in \mathbb{C}^\times \rightsquigarrow \mathcal{E} := E + d_0 \hbar \partial/\partial\hbar$. Зададим связность $\hat{\nabla}$ на $\hat{T}$

$$\begin{cases} \hat{\nabla}_X(\hat{Y}) = \hbar^{-1} \widehat{Y \circ X} \\ \hat{\nabla}_{\mathcal{E}}(\hat{Y}) = \widehat{[E, Y]} =: \widehat{Gr_E(Y)} \end{cases}$$

– это определение для поднятия $\hat{Y}$ плоских $Y \in \mathcal{X}(V)^{flat}$ по линейности

Оно продолжается на все векторные поле

$$\forall Y \begin{cases} \hat{\nabla}_X \hat{Y} = \widehat{(\nabla_X Y)} \\ d_0 \hat{\nabla}_{\hbar\partial/\partial\hbar} \hat{Y} = \widehat{\hbar\partial_\hbar Y - \hbar^{-1} E \circ Y + Gr_E(Y)} \end{cases}$$

Тогда, следующие условие равносильны:

- $\hat{\nabla}$ – плоская связность на $\hat{T}$
- $E$ – эйлерово векторное поле, т.е. $\mathcal{L}_E(g) = Dg$; $\mathcal{L}_E(\circ) = d_0(\circ)$

Пример На $QH^*(X)$ существует следующее эйлерово поле:

$$E = c_1(X) + \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \tfrac{1}{2}\deg T_i\right) y_i \partial_{y_i}$$

(со значениями $d_0 = 1$, $D = 2 - \dim_{\mathbb{C}} X$)

Оператор $Gr\,E$ действует на постоянные векторное поле $T_i$ растяжениями.

Утв $S(\hbar^{-Gr E} \hbar^{c_1(X) \cup \cdot})$ – фундаментальная матрица решений $\hat{\nabla}$.

Идея док-ва: $\nabla^\hbar S(T_i)$ равно $0 \Rightarrow D^\hbar(S(\hbar^{-Gr_E} \hbar^{c_1(X)\cup\cdot} T_i)) \equiv 0$

$\nabla^\hbar \tilde{S} = 0 \Leftrightarrow -\hbar^{-1} E * \tilde{S} = \nabla_E \tilde{S} \Rightarrow \nabla_{\hbar\partial_\hbar}(S(\hbar^{-Gr_E} \hbar^{c_1(X)\cup\cdot})(T_i)) =$

$= (\hbar\partial_\hbar + \nabla_E + Gr_E) S (\hbar^{-Gr_E} \hbar^{c_1(X)\cup\cdot})(T_i)$. Непосредственная п.-ка

$(\hbar\partial_\hbar + \nabla_E + Gr_E) S = S(\hbar\partial_\hbar + \nabla_E + Gr_E - \hbar^{-1} c_1(X))$

Осталось заметить, что выполнено рав-во

~~Очевидно~~ $(\hbar\partial_\hbar + \nabla_E + Gr_E - \hbar^{-1} c_1(X)\cup_0)(\hbar^{-Gr_E}\hbar^{c_1(X)\cup_0} T_i) =$

$= (\hbar\partial_\hbar + Gr_E - \hbar^{-1}c_1(X)\cup_0)(\hbar^{-Gr_E}\hbar^{c_1(X)\cup_0}T_i) =$

$= -Gr_E \hbar^{-Gr_E}\hbar^{c_1(X)\cup_0}T_i + \hbar^{-Gr_E}\hbar^{c_1(X)\cup_0}(c_1(X)\cup T_i) + Gr_E \hbar^{-Gr_E}\hbar^{c_1(X)\cup_0}T_i$

$- \hbar^{-1}c_1(X)\hbar^{-Gr_E}\hbar^{c_1(X)\cup_0}T_i = 0$, т.к. $c_1(X)\cup \hbar^{Gr_E} = \hbar^{Gr_E-1}(c_1(X)\cup_0)$.

Это утверждение позволяет вычислить $S(\hbar) = Id + \hbar^{-1}S_1 + \ldots$ □ начиная с Id, зная только фроб. алгебру и поле E.

## 3 Гипотеза Gamma-I и явный вид для J-функции

Сейчас я дам примерную формулировку Gamma I-гипотезы (сформулированной Галкиным-Голышевым-Иритани) как и гипотеза Дубровина, это одно из свойств многообразия Фано X, которое выполняется, когда X имеет гомологическое зеркало. Обсуждение этих свойств - важная составляющая нашего курса.

Опр Гамма класс гладкого проективного Фано X это

$$\hat\Gamma_X := \prod_{i=1}^{\dim X}\Gamma(1+\delta_i) \in H^*(X),$$ где

$\delta_i$ - корни Черна, т.е. $c_t(X) = \prod_{i=1}^{\dim X}(1+\delta_i t) = \sum c_i(TX)t^i$

Эквивалентно, $\hat\Gamma_X = \exp\left(-\gamma c_1(X) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \zeta(k)(k-1)!\, ch_k(X)\right)$,

где $\zeta$ - дзета функция, $\gamma$ - константа Эйлера

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \log n\right).$$

Гипотеза (Gamma I) X - проективное Фано, удовлетворяющее некоторому условию O на мн-во собственных значений оператора $(c_1 *_0 -)$. Тогда выполнено рав-во

$$\hat\Gamma_X = \lim_{\hbar\to\infty} \frac{J_X(\hbar)}{\langle[pt], J_X(\hbar)\rangle}.$$

Вычисление $J_X \in \mathcal{X}(v)[[t^{-1}]]$.

$\forall v, w \in H^{\bullet}(X, \mathbb{C})$ для постоянных сечений $\bar{v}, \bar{w}$ выполнено
$(S(v), S(w)) = \eta(v, w)$

Рассмотрим $L(t) := \sum_{j=0}^{m} \eta(s_j, \mathbb{1}) T^j$, где $s_j = S(T_j)$. Тогда $\forall i$

$$(T_i, L) = \sum_{j=0}^{m} \eta(s_j, \mathbb{1})(T_i, T^j) = \eta(s_i, \mathbb{1}) = (S(T_i), \mathbb{1}) =$$

$$= (T_i, S^{-1}(\mathbb{1})) = (T_i, J_X) \Rightarrow J_X = L = \sum_{j=0}^{m} \eta(s_j, \mathbb{1}) T^j$$

Подставим $S$, получаем

$$J_X(\alpha) = \mathbb{1} - \sum_{j=0}^{m} \left\langle\left\langle \frac{T_j}{t + \psi}, \mathbb{1} \right\rangle\right\rangle_{0,\beta} T^j$$

## ④ Квантовый $\mathcal{D}$-модуль и малые квантовые когомологии

Напоминание. $X$ - проективное Фано $\Rightarrow$ $(H^{\bullet}(X,\mathbb{C}), \eta, \Lambda_{g,n})$ - когомологическая теория поля над полугрупповым кольцом
$$R = \mathbb{C}[q^{\beta} \mid \beta \in H_2(X,\mathbb{Z})]$$

$\rightsquigarrow$ фробениусова алгебра $QH^{\bullet}(X)^{small}$ и ее формальная деформация $QH^{\bullet}(X)$.

$QH^{\bullet}(X)^{small}$ определяется ограничением пр-ва параметров $\operatorname{Spec} R$ на генераторы градуировки 2. $\square$

Замечание. Ограничение $\mathcal{T}_X |_{H^2(X,\mathbb{C})}$ имеет следующий вид: