(1) Докажите, что $M_n(R^{op}) \cong M_n(R)^{op}$ для любого кольца R.

(2) Пусть A – F-алгебра. Докажите, что если левые A-модули M и M' изоморфны, то F-алгебры $\operatorname{End}_A M$ и $\operatorname{End}_A M'$ тоже изоморфны.

(3) Докажите, что любой левый (правый) модуль над алгеброй с делением является свободным.

(4) Пусть $A = M_n(D)$, где D – алгебра с делением.
  (a) Докажите, что множество строк над D длины n является простым правым A-модулем относительно матричного умножения.
  (b) Докажите, что $D \cong \operatorname{End}_A M$ для простого правого A-модуля M.

(5) Пусть R – кольцо. Покажите, что любой левый $M_n(R)$-модуль естественно изоморфен как левый R-модуль (относительно диагонального вложения $R \subset M_n(R)$) модулю $M^{\oplus n}$ для некоторого левого R-модуля M.

(6) Предположим, что в кольце R имеются элементы e_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, для которых выполнены соотношения матричных единиц:
  (a) $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$,
  (b) $e_{ij}e_{kl} = 0$ при $j \neq k$,
  (c) $e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn} = 1$.

  Докажите, что тогда $R \cong M_n(S)$ для $S = \{g \in R \,|\, ge_{ij} = e_{ij}g, 1 \leq i, j \leq n\}$ (т.е. S состоит из элементов, которые коммутируют со всеми e_{ij}).

(7) Пусть R – кольцо. Опишите все двусторонние идеалы $M_n(R)$ в терминах идеалов кольца R.

(8) Пусть F – поле, V – конечномерное векторное пространство над F, $A = \operatorname{End}(V)$. Докажите, что правило

$$W \leq V \,\mapsto \operatorname{Hom}_F(V, W) \subset A$$

устанавливает биекцию между подпространствами V и правыми идеалами в A.

(9) Опишите все конечномерные простые алгебры над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

(10) Для поля F и ненулевых элементов $a, b \in F$ символ $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ обозначает алгебру кватернионов, т.е. четырёхмерную F-алгебру с базисом $1, i, j, k$ и умножением $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k$.
  (a) Докажите, что $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ – алгебра с делением.
  (b) Докажите, что для ненулевых $a, b \in \mathbb{R}$ алгебра $\left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right)$ изоморфна либо $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$, либо $M_2(\mathbb{R})$.
  (c) Докажите, что алгебра кватернионов $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ изоморфна $M_2(F)$ если и только если уравнение $x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 = 0$ имеет нетривиальное решение.
  (d) Докажите, что над $\mathbb{Q}$ существует бесконечно много попарно неизоморфных алгебр кватернионов.

(11) Докажите, что $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

(12) Пусть A и B – алгебры над полем F. Вкладывается ли $A \times B$ в $A \otimes_F B$ как подалгебра?

(13) Докажите, что $Z(M_n(F)) \cong F$ для поля F.

(14) Пусть V, W – конечномерные векторные пространства над полем F. Докажите, что

$$\operatorname{End}_F(V) \otimes \operatorname{End}_F(W) \cong \operatorname{End}_F(V \otimes W).$$

(15) Пусть U, V и W – конечномерные векторные пространства над полем F. Докажите, что композиция

$$\Phi\colon U \times V \times W \to (U \otimes V) \times W \to (U \otimes V) \otimes W$$

трилинейна (линейна по каждому аргументу) и обладает универсальным свойством: для любого векторного пространства N и трилинейного отображения $\phi\colon U \times V \times W \to N$ существует единственный гомоморфизм $f\colon (U \otimes V) \otimes W \to N$ такой, что $f \circ \Phi = \phi$. Докажите аналогичное утверждение для $U \otimes (V \otimes W)$ и выведите отсюда $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$.

(16) Положим $\mathbb{F}_2(\sqrt{t}) = \mathbb{F}_2(t)[x]/(x^2 - t)$. Докажите, что $\mathbb{F}_2(\sqrt{t}) \otimes_{\mathbb{F}_2(t)} \mathbb{F}_2(\sqrt{t}) \cong \mathbb{F}_2(\sqrt{t})[\epsilon]/(\epsilon^2)$.

(17) Изморфны ли $\mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(y)$ и $\mathbb{C}(x, y)$?

(18) (a) Докажите, что для расширения полей $F \subset E$ имеет место изоморфизм $\left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes_F E \cong \left(\frac{a,b}{E}\right)$.
  (b) Докажите, что для поля F и ненулевых элементов $a, b \in F$ найдётся расширение полей $F \subset E$ степени два такое, что $\left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes_F E \cong M_2(E)$.

(19) Содержит ли $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ делители нуля? нильпотенты?

(20) Пусть $F \subset E$ – конечное расширение Галуа с группой Галуа G. Докажите, что имеет место изоморфизм

$$E \otimes_F E \to \operatorname{Maps}(G, E) \cong \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{|G|}, \quad a \otimes b \mapsto (g \mapsto ag(b)).$$

(21) Пусть A – конечномерная алгебра с делением. Докажите, что любая подалгебра $B \subset A$ также является алгеброй с делением. В частности, $Z(A)$ – поле.

(22) Верно ли, что для любого подполя $E \subset A$ алгебры с делением A выполняется $E \subset Z(A)$?

(23) Пусть A, B – конечномерные простые алгебры над полем F.
  (a) Докажите, что если $M_n(A) \cong M_n(B)$ для некоторого n, то $A \cong B$.

(b) Докажите, что если $A \otimes C \cong B \otimes C$ для некоторой конечномерной центральной простой алгебры C, то $A \cong B$.

(24) Пусть A, B, C – конечномерные простые алгебры над полем F. Верно ли, что $A \otimes C \cong B \otimes C$ влечёт $A \cong B$?

(25) Докажите, что $\left(\frac{a,b}{F}\right)^{op} \cong \left(\frac{a,b}{F}\right)$.

(26) Пусть $\operatorname{char} F \neq 2$. Докажите, что $\left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes_F \left(\frac{a,b}{F}\right) \cong M_4(F)$. В частности, $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \otimes_{\mathbb{R}} \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \cong M_4(\mathbb{R})$.

(27) Пусть A – конечномерная центральная простая алгебра над полем F и $\overline{F}$ – алгебраическое (или сепарабельное) замыкание поля F. Докажите, что для некоторого n имеет место изоморфизм $A \otimes_F \overline{F} \cong M_n(\overline{F})$ как $\overline{F}$-алгебр (поле $\overline{F}$ вложено в $A \otimes_F \overline{F}$ посредством $x \mapsto 1 \otimes x$).

(28) (a) Пусть F – поле, $\widetilde{F}$ – его сепарабельное замыкание, $G = \operatorname{Aut}_F \widetilde{F}$ – абсолютная группа Галуа. Для центральной простой алгебры A над F по предыдущей задаче имеет место изоморфизм $\varphi\colon A \otimes_F \widetilde{F} \xrightarrow{\cong} M_n(\widetilde{F})$. Определим действие G на $M_n(\widetilde{F})$ как $g \cdot x = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(x))$, где действие G на $A \otimes_F \widetilde{F}$ индуцировано действием на втором сомножителе. Докажите, что $A \cong M_n(\widetilde{F})^G$, где инварианты берутся относительно введённого выше действия.

(b) Приведите явный пример действия $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на $M_2(\mathbb{C})$, для которого $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \cong M_2(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.

(29) Пусть F – вещественно замкнутое поле, т.е. $[\overline{F} : F] = 2$. Докажите, что $Br(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(30) Пусть A, B – алгебры над полем F. Верно ли, что если $M_n(A) \cong M_n(B)$, то $A \cong B$?

(31) Пусть A – конечномерная алгебра и $a, b \in A$ такие, что $ab = 1$. Докажите, что $ba = 1$.

(32) Пусть A, B – алгебры над полем F. Докажите, что если $A \otimes_F B$ – простая, то A и B – простые.

(33) Пусть A – алгебра над полем F. Докажите, что $C_{End(A)}(A) = A^{op}$, где $A, A^{op} \to End(A)$ вкладываются правыми и левыми умножениями соответственно.

(34) Пусть D – конечномерная центральная алгебра с делением над полем F. Докажите, что для любого подполя $F \subset E \subset D$ степень расширения $[E : F]$ делит $\deg D$.

(35) Найдите (с точностью до изоморфизма) максимальные подполя в $\mathbb{R}$-алгебрах $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ и $M_2(\mathbb{R})$.

(36) Верно ли, что для любых максимальных подполей $\mathbb{R} \subset E, E' \subset \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ найдётся обратимый элемент $a \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ такой, что $E' = aEa^{-1}$?

(37) Приведите пример неизоморфных максимальных подполей в $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right)$.

(38) Рассмотрим кольцо R и автоморфизм $f\colon R \to R$. Докажите, что $f(Z(R)) = Z(R)$, т.е. f ограничивается до автоморфизма $Z(R)$.

(39) Пусть $F \subset E$ – расширение Галуа с группой Галуа G. Покажите, что $\operatorname{Aut}_F(M_n(E)) \cong PGL_n(E) \rtimes G$, где в качестве автоморфизмов рассматриваются автоморфизмы F-алгебры, а действие G индуцировано поэлементным действием на матрицу.

(40) Рассмотрим расширение полей $F \subset E$. Является ли гомоморфизм $Br(F) \to Br(E)$
(a) инъективным,
(b) сюръективным,
(c) сюръективным в предположении, что степень расширения $[E : F]$ конечна?

(41) Пусть A – конечномерная центральная простая алгебра над полем F. Докажите, что найдётся конечное расширение полей $F \subset E$ такое, что существует изоморфизм E-алгебр $A \otimes_F E \cong M_n(E)$.

(42) Пусть A – конечномерная центральная простая алгебра над полем F. Докажите, что для расширения полей $F \subset E$ такого, что $[E : F]$ взаимно просто с $\operatorname{ind}(A)$, имеет место равенство $\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A_E)$.

(43) (a) Пусть A, B – конечномерные центральные простые алгебры над полем F. Докажите, что если $\operatorname{ind}(A)$ и $\operatorname{ind}(B)$ взаимно просты, то $\operatorname{ind}(A \otimes B) = \operatorname{ind}(A)\operatorname{ind}(B)$.

(b) Пусть D_1, D_2 – конечномерные центральные алгебры с делением над полем F. Докажите, что если $\dim D_1$ и $\dim D_2$ взаимнопросты, то $D_1 \otimes_F D_2$ – центральная алгебра с делением.

(44) Пусть $\operatorname{char} F \neq 2$. Докажите, что если $\left(\frac{a,b}{F}\right) \ncong M_2(F)$, то $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ – циклическая алгебра.

(45) Пусть $[E : F]$ – циклическое расширение степени n. Докажите, что для i взаимно простого с n имеет место изоморфизм $(E/F, \sigma, a) \cong (E/F, \sigma^i, a^i)$.

(46) Пусть D – конечномерная центральная простая алгебра с делением над полем F. Положим $\operatorname{ind}(D) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, где p_i – различные простые. Докажите, что тогда найдутся алгебры с делением $D_1, D_2, \dots, D_n$ такие, что $D \cong D_1 \otimes_F D_2 \otimes_F \dots \otimes_F D_n$ и $\operatorname{ind}(D_i) = p_i^{k_i}$. (Можно пользоваться тем, что $D^{\otimes \operatorname{ind}(D)} \cong M_{\operatorname{ind}(D)}(F)$).

(47) Докажите, что для расширения конечных полей $F \subset E$ отображение нормы $N_{E/F}\colon E^* \to F^*$ сюръективно.

(48) Пусть A, B – центральные простые алгебры над полем F. Докажите, что если существует инъективный гомоморфизм F-алгебр $M_n(A) \to M_n(B)$, то существует инъективный гомоморфизм $A \to B$.

(49) Докажите, что для поля F и $a \in F \setminus \{0, 1\}$ найдётся элемент $b \in F(\sqrt[n]{a})$ такой, что $N_{F(\sqrt[n]{a})/F}(b) = 1 - a$.

(50) Пусть F – поле. Для $a \in F^*$ положим

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(F).$$

Рассмотрим циклическое расширение $F \subset E$ степени n и выберем образующую группы Галуа σ. Положим $M_n(E)_\varphi = \{x \in M_n(E) \,|\, \sigma \cdot x = \varphi^{-1} x \varphi\}$, где $\sigma \cdot x$ – поэлементное действие группы Галуа на матрице. Докажите, что $M_n(E)_\varphi$ – циклическая центральная простая алгебра над F.