

Лекция 1. (проф. Остеро) 1 августа

Обобщение $\zeta(s)$ - краткая Одетт-функция Римана.
Основной интерес - ее значение в целых точках, а также ее разложения (Лорана) в целых точках.

Здесь возникает ряд вопросов: ряды и функции
от их регулярности. Их коэфф. интерпретируются
как регулярные функции.

Тема сегодняшней заметки - в книгах Римана.

Одна из формул для значений функции имеет вид:

$$2 \log 2 = 1 + \frac{2}{2^3-2} + \frac{2}{4^3-4} + \frac{2}{6^3-6} + \dots$$

(Он написал ее в возрасте 14-15 лет). Этого
всего лишь метод, к-рый он нашёл. Он связан
с суммой a_n . Пусть есть сумма

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$, где $a_j \geq 0$. Тогда эта же

сумма есть $\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots)$, $b_n = a_n - a_{n+1}$.

Теорема Если первый ряд сходится, то сходится и
их суммы равны.

Доказ. Обозначим 2-й ряд; получим:

$$\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) (-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} a_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2} a_{N+1}$$

В силу сходимости 1-го ряда имеем: $a_{N+1} \rightarrow 0$, так что
при $N \rightarrow \infty$ получаем искомого.

Применим этот критерий к ряду

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots ; \text{ где } a_n = \frac{1}{n}.$$

Тогда $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ и, учитывая 2-й
знаменатель,

получим:

$$2 \log 2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots$$

Но - критерий ряд знакопеременный, но он сходится,
если он сходится.

Сгруппируем слагаемые по две: $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}$ и т.д.

получим сумму $\frac{2}{2^3-2} + \frac{2}{4^3-4} + \dots$. Так мы доказательно ускорили сходимость.

Теперь будем сами приписывать этот член к каждому ряду попарно:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{1}{4} (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots), \text{ где}$$

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

$$\text{Если } b_n = \frac{1}{n(n+1)}, \text{ то } a_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Так можно ускорять сходимость и далее. Так, ускоряя сходимость, Раманujan смог вычислить $\zeta(2)$ с большой точностью, исл. имеет небольшие числа новые ряды.

Рассм. раск-е ряд $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$. Здесь $a_n = n$,

$b_n = a_n - a_{n+1}$, так что сформирована новая сумма равная

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-1 + 1 - 1 + \dots)$$

далее, $a_n = b_n - b_{n+1} = 0$, так что "сумма" исл. ряда

$$\text{есть } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Все это дает способ для мероморфного продолжения $\zeta(s)$. Раманujan сделал это, не зная понятия мером. ф-ции, не видел теоремы Вейерштрасса.

Он рассмотривал суммы

$$S_\varepsilon = \frac{1}{1^\varepsilon} + \frac{1}{2^\varepsilon} + \frac{1}{3^\varepsilon} + \frac{1}{4^\varepsilon} + \dots, \text{ где } \varepsilon > 1$$

$$S'_\varepsilon = \frac{1}{1^\varepsilon} - \frac{1}{2^\varepsilon} + \frac{1}{3^\varepsilon} - \frac{1}{4^\varepsilon} + \dots$$

Какие связи эти суммы? Имеем:

$$(1 - 2^{1-\varepsilon}) S_\varepsilon = S'_\varepsilon$$

Т.е. чтобы получить мер. прод. S_ε , доста. получить исл. S'_ε ко S'_ε - знакопеременный ряд. При этом ускорение сходимости

можно применить к тем η , коих не получил сходящийся ряд. Там получим продолжение S_z' для всех вещественных z (для заданного z - для какого-либо числа η). То же самое будет и для комплексных значений z .

В качестве примера можно рассмотреть значения $\zeta(0)$ и $\zeta(-1)$. Там, например,

$$\zeta(0) = S_0 = -S_0', \text{ но } S_0' = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, a_n = 1,$$

$b_n = 0$, так что при умножении s -ср. даёт значение $\frac{1}{2}$.
 Итого, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Аналогично,

$$\zeta(-1) = S_{-1} = -\frac{1}{2} S_{-1}',$$

$$S_{-1}' = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4},$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

Применяя этот метод, можно дать, что число $\zeta(1-n)$ - рациональное при всех $n \geq 1$. Более точно,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \text{ где } B_{2n} \text{ - числа Бернулли.}$$

$$\zeta(-2n) = 0$$

Примеры покажут, что если сходящийся ряд $(y \text{ в } k)$ s -ср., то первый ряд может и расходиться. Который от него тут ∞ s -ср. (пусть ∞ s -ср.). Это можно сделать, если изменить понятие сходимости.

Опред. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ s -ср. по Абелю, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ s -ср. для всех x (в

обычном смысле) для всех $0 \leq x < 1$, и его сумма $f(x)$

имеет предел при $x \rightarrow 1$. Этот предел и называется суммой (по Абелю) исходного ряда.

Пример: $u_n = (-1)^{n+1}$, $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Возьмем сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = - \frac{(-x)}{1 - (-x)} = \frac{x}{1+x} = f(x),$$

если $0 < x < 1$. Если x стремится к единице, то предел

$f(x)$ существует:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Имеет место:

Лемма Абеля: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ окажется в обобщенном смысле,

то этот ряд сходится по Абелю, более того, его сумма (в обобщенном смысле) — такая же, что и сумма по Абелю.

Это означает, что если мы имеем дело с суммир. по Абелю,

то мы получим еще больше сх-ся рядов, чем при суммир.

в обобщенном смысле.

Д-во. Вспомогат. не сложно доказать, чтобы ряд сходился к числу (в обобщенном смысле). Обозначим $U_n = u_1 + \dots + u_n$.

$$\text{Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = U_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (U_n - U_{n-1}) x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} U_n x^{n+1} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n.$$

(Ряд $0x$ -ся при всех x , $0 < x < 1$, т.к. $U_n \rightarrow 0$ и ограничен),

пусть $\varepsilon > 0$ дано. Тогда суш. N т.ч. $|U_n| \leq \varepsilon$ при всех

$n \geq N$ (поскольку $U_n \rightarrow 0$). Значит,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n \right| \leq (1-x) \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} |U_n| + \varepsilon \frac{x^N}{1-x} \right\} \leq \varepsilon + (1-x) \sum_{n=1}^{N-1} |U_n|.$$

Если x достаточно близко к 1, то второе слагаемое будет ограничено ε , тем что $|f(x)| \leq 2\varepsilon$. Это и означает, что $f(x) \rightarrow 0$, если $x \rightarrow 1$, и лемма будет доказана.

Теорема. Пусть (a_n) — произвольная послед-ть, и (b_n) — послед., опред. как $b_n = a_n - a_{n+1}$. Тогда ряд

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

сходится по Абелю т.е. т.т., когда $b_1 - b_2 + b_3 - \dots$

сходится по Абелю, и тогда их суммы A и B

связаны равенством: $A = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} B$.

Д-во. Заметим, что

① $|b_n| \leq |a_n| + |a_{n+1}|$, и ② $|a_n| \leq |a_1| + |b_1| + \dots + |b_{n-1}|$

Из ① следует, что если радиус сходимости рядов $\sum a_n x^n \geq 1$, то то же верно для радиуса с-сти $\sum b_n x^n$.

Предположим, что оба радиуса с-сти ≥ 1 и положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n (-1)^{n+1}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n (-1)^{n+1}$$

Утверждается: $a_1 x + x g(x) = (1+x) f(x)$.

Действительно, $a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) x^{n+1} (-1)^{n+1}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n (-1)^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} (-1)^{n+1} =$
 $= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n (-1)^{n+1} = (1+x) f(x)$.

Но из равенства $a_1 x + x g(x) = (1+x) f(x)$ след., что

предел $g(x)$ при $x \rightarrow 1$ сущ. т.е. т.т., когда сущ.

предел $f(x)$ при $x \rightarrow 1$. Отсюда эти пределы

связаны равенством $a_1 + B = 2A$, т.е.

$$A = \frac{a_1}{2} + \frac{B}{2}.$$

Следствие. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s}$ сходится при всем $s \in \mathbb{C}$ по Абелю к голоморфной функции.

Действительно, после почленного умножения численности сходимость ряд из Гамма превращается в сходящийся ряд (Формула двоя).
 Translation formula для Гаусса-функции Римана

Разложим в ряд по степеням

$$(k-1)^{1-s} = k^{1-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-1)s \dots (s+k-1)}{(k+1)!} k^{-s-k}$$

(2-но,

$$(k-1)^{1-s} = k^{1-s} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{1-s} = k^{1-s} \left(1 + \frac{s-1}{k} + \frac{(s-1)s}{2!k^2} + \dots + \frac{(s-1)s(s+1)}{3!k^3} + \dots\right).$$

Этот верен при всем $s \in \mathbb{C}$.

Пусть $s > 1$ — вещественное. Просуммируем ф-у по всем k от 2 до $+\infty$:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-1)s \dots (s+k-1)}{(k+1)!} (\zeta(s+k) - 1)$$

Здесь мы использовали положительность членов ряда. Утверждается, что эта ф-ла даёт мероморфное прод. $\zeta(s)$ на $\mathbb{C}$.

Этот метод работает и прод. гамма-функцию с помощью её функции Гурла. Если $\operatorname{Re} s > 0$, то $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Тогда, зная $\Gamma(s+1)$, можно определить $\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1)$ и т.д. и тем, шаг за шагом, двигаться влево и продолжить $\Gamma(s)$ на все $\mathbb{C}$.

Надобное получается и для $\zeta(s)$:

$$1 = (s-1)(\zeta(s)-1) + \frac{(s-1)s}{2!}(\zeta(s+1)-1) + \dots$$

Допустим, что все величины определены:

$\zeta(s+1), \zeta(s+2), \dots$, и остаётся неизвестной лишь $\zeta(s)$. Тогда эта формула позволяет определить $\zeta(s)$.

Лекция 2 проф. Остепьева (2 августа).

Вчера мы рассмотрели ζ -функцию Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Этот ряд сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, иrogen к каждому компактному подмножеству комплексной плоскости $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s \geq \sigma\}$, $\sigma > 1$, он сходится и равномерно:

это следует из нер-н $|n^{-s}| \leq n^{-\sigma}$. Значит, этот ряд будет в этой пол-ти аналитич. ф-цией (как сумма ряда из голом-ф.). В идею, его можно дифф. любое число раз. Так,

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \ln n \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 1.$$

Пусть теперь a - произв. точка в $\mathbb{C}$ та к $\operatorname{Re} a > 1$. Тогда

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) (s-a)^k$$

- разложение $\zeta(s)$ в ряд Тейлора в т. a , иrogen

$$c_k(a) = \frac{\zeta^{(k)}(a)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} (\ln n)^k.$$

Что будет в точке $a=1$? Там имеет место разложение Лорана. Как оно выглядит?

Другие вопросы: как выглядят разложения Тейлора в нуле? в отрицат. целых точках? Вот этими вопросами мы и будем заниматься.

Разложение Лорана в точке $s=1$ имеет вид:

$$\frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \gamma_k (s-1)^k$$

Опред. Числа γ_k называются константами Стилькса

(именно Стилькс ввел их в 1885 г.),

как их считать? Применим такой канонический метод: доказать, что у $\xi(s)$ нет полюсов в 1 и в целом. упрел. более строгим для $\sigma_k(a)$. Тогда для γ_k получаем формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma_k(n))^k}{n} \quad (*)$$

Конечно, эти ряды расходятся и такие формулы не имеют смысла. Мы уже знаем, что γ_0 на самом деле совпадает с пост. Эйлера:

$$\gamma_0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right).$$

Это отчасти оправдывает формулу (*).

Введем понятие регулярности ряда или послед-ти. Пусть $(a_n)_{n \geq 1}$ - послед-ть комплексных чисел. Предположим, что существует полином $P(x, y)$ от двух переменных x, y , без пост. члена, т.е. что предел

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \{a_N - P(N, a_N)\}$$

существует. Тогда предел наз. регулярным.

Этот предел единственен, и он назыв. регулярным пределом послед-ти (a_n)

2-го (единств.) Если P, Q обладают этими св-вами, то $(P-Q)(N, \in N)$ имеет предел при $N \rightarrow \infty$. Но это невозможно, т.к. P, Q не имеют св-ва, т.ч. $\square$.

Пример 1 Регуляризов. предел сумм $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ есть постоянная Эйлера (здесь мы взяли $P(x, y) \equiv y$).

Пример 2 Регу. предел сумм $\sum_{n=1}^N \log n$ есть $-\frac{1}{2} \log 2\pi$.

Это число есть не что иное, как логарифм факториала: $\sum_{n=1}^N \log n = \log N!$. По формуле Стирлинга,

$$N! \sim N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}, \quad N \rightarrow +\infty.$$

Значит,

$$\log N! = N \log N - N - \frac{1}{2} \log N - \frac{1}{2} \log 2\pi \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow +\infty. \text{ Взяв (здесь } P(x, y) = xy - x + \frac{1}{2}y \text{),}$$

Сформулируем несколько утверждений:

1) Разложение Лорана $\xi \in 1$ имеет вид

$$\frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \gamma_k (s-1)^k,$$

где γ_k - регуляризов. предел послед-тей

$$\sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n}$$

Более точно,

$$\gamma_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n} - \frac{(\log N)^{k+1}}{k+1} \right\}.$$

В частности, γ_0 совпадает с const. Эйлера.

2) Разложение $\xi \in O$ имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta_k s^k,$$

где δ_k — регулярные функции от s и δ_k —

$$\sum_{n=1}^N (B_n n)^k, \text{ если } k \geq 1,$$

$$\delta_0 = -1/2.$$

(Утверждение для $k=0$ не справедливо. Всп. коэф.

в точках $s = -1, s = -2, s = -3, \dots$ будет давать

соотв. $2, 3, 4, \dots$ — значения).

В частности, $\xi'(0) = -\delta_1 = -\frac{1}{2} B_1 2\pi$,

D -ва, k -ое с кривой, не совпадает с исходной

D -ва. Стыкнется и кривоизогнутые D -ва,

которые можно встретить в учебниках.

Каноническую формулу сдвига:

$$\frac{(n-1)^{s-1}}{s-1} = n^{s-1} + \frac{s}{2!} n^{s-2} + \frac{s(s+1)}{3!} n^{s-3} + \dots,$$

если $n > 1$,

Продумываем равенство по всем $n > N$, где $N \geq 1$

— заданное число; получим:

$$\frac{N^{s-1}}{s-1} = \xi_N(s) + \frac{s}{2!} \xi_N(s+1) + \frac{s(s+1)}{3!} \xi_N(s+2) + \dots (**)$$

(здесь

$$\xi_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s} = \xi(s) - \sum_{n=1}^N n^{-s})$$

Как получается подковы, очевидно для $\xi_N(s)$.

Лемма Если $\operatorname{Re} s > 3/2$, то $|\xi_N(s)| \leq 2N^{1-\sigma}$,

где $\sigma = \operatorname{Re} s$

$$\text{Действительно, } |\xi_N(s)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} \leq \int_N^{\infty} x^{-\sigma} dx$$

$$= \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \Big|_N^{+\infty} = \frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1} \leq 2N^{1-\sigma}, \text{ где } \sigma > 3/2. \square$$

Теперь, пользуясь этой оценкой, можно завершить доказательство: все ряды $(**)$ с-с на любой компактной подмножестве $\sigma \in \mathbb{C}$.

Д-во. Пусть K — компактное подм-во $\mathbb{C}$.

Тогда найдется $k_0 \geq 0$ т.ч. $\operatorname{Re} s \geq \frac{3}{2} - k_0$

для всех $s \in K$. Аналогично, существует постоянная A т.ч. $|s| \leq A$ для всех $s \in K$.

Согласно ряду $(**)$, отвечающие $k \geq k_0$, оценим с помощью леммы:

$$\left| \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{(k+1)!} \zeta(s+k) \right| \leq 2 \frac{A(A+1) \dots (A+k-1)}{(k+1)!} \cdot N^{1-\sigma-k} \\ \leq 2 \frac{A(A+1) \dots (A+k-1)}{(k+1)!} N^{-\frac{1}{2} + k_0 - k}.$$

Эта оценка не зависит от s . Экспоненциальный рост первого множителя компенсируется

экспоненциальным убыванием второго. Откуда и следует сходимость $(**)$.

Каким же образом наше доказательство даёт нечто большее:

Если $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$, то $\frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1} - \zeta_N(s)$ сходится к 0 при $N \rightarrow +\infty$, причем эта сходимость равномерная на любой компактной м-те $\sigma \in \mathbb{C}$.

Получим $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}\}$.

(не самая деле даже при $\operatorname{Re} s > 0$).

К-нибудь график до точки $s = \sigma$ показывает, что при $\operatorname{Re} s \geq -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} = \zeta_N(s) - \frac{s}{2!} \zeta_N(s+1) \quad \text{сходится к 0 при}$$

$N \rightarrow +\infty$, равномерно на всяком компакте.

То же верно для производных и, т.о., для их коэф. Тейлора в 1.

$$\text{то } \zeta_N(s) = \frac{N^{1-s}}{s-1} = \zeta(s) - \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \frac{N^{1-s}-1}{s-1} = \frac{1}{s-1}$$

это — голоморфная функция, причем при $N \rightarrow \infty$ стрем. к 0 равномерно на всяком компакте.

Возьмем k -й коэф. Тейлора этой функции в точке $s=1$. Полагаясь на эту функцию и $(-1)^k k!$. Тогда разность $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ дает коэф.

γ_k . Далее,

$$n^{-s} = n \cdot n^{1-s} = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)^k (\log n)^k}{k!} = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\log n)^k (s-1)^k,$$

тогда сумма $\sum_{n=1}^N n^{-s}$ дает коэффициент

$$\sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n}.$$

$$\text{Каковы, } \frac{N^{1-s}-1}{s-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s-1)^{k-1} (\log N)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} (s-1)^k (\log N)^{k+1}$$

и, полагаясь на $(-1)^k k!$, получим коэф.

$$= \frac{(\log N)^{k+1}}{k+1}. \quad \text{В итоге искомый коэф. есть}$$

$$\gamma_k = \sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n} + \frac{(\log N)^{k+1}}{k+1}.$$

то этот коэф. $\rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Откуда

заключаем:

$$\gamma_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n} - \frac{(\log N)^{k+1}}{k+1} \right).$$

Т.е., δ_k действительный регулярный предел
послед-ним $\sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n}$.

Подготовим образы функции разложения в
точках $s=0, -1$ и т.д. Рассмотрим лишь

случай $s=0$. Тогда

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s} + \frac{s}{2!} \frac{N^{-s}}{s} - \frac{N^{1-s}}{s-1} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

(если $\operatorname{Re} s \geq -1/2$, то можно восп. ф-лы для

$$\xi_N(s) = \frac{N^{1-s}}{s-1} \text{ с заменой } s \text{ на } s+1)$$

то в окрестности нуля эта сходимость равна.

Итак, k -й коэф. Тейлора $\rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$.

Вывод: единичная ф-ция не $(-1)^k k!$, и возникает
коэф. Тейлора каждого из слагаемых:

$$\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \delta_k}{k!} s^k, \text{ т.е. искомым коэф.}$$

равен $\delta_k = \sum_{n=1}^N (\log n)^k + \frac{1}{2} (\log N)^k + N \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} k!}{i!} (\log N)^i$

(Т.е. $N^{1-s} = N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\log N)^k s^k$? $\frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$, и

значит, $\frac{N^{1-s}}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$, $c_k = N \sum_{i+j=k} \frac{(-1)^i (\log N)^i}{i!}$)

и эти c_k $\rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$.

Итак, δ_k - регулярный предел послед-ним

$$\sum_{n=1}^N (\log n)^k$$

Мы знаем, что здесь будет значение:

$$P = - \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{i!} \frac{k!}{i!} N (\log N)^i - \frac{1}{2} (\log N)^k$$

Если $k=0$, послед. слаг. дает посл. член, и это

обязатель, потому что $k=0$ является целым
числом. Но при $k \neq 0$ находим δ_0 непосредств:

$$\delta_0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - N \right) = -\frac{1}{2}, \text{ т.е.}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Этот подход работает и для любой точки.

Семинар по теории чисел (2 августа).

Задача 1. Пользуясь формулой

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} e^{-\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}},$$

доказать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Реш. Рассмотрим конечное произведение

$$2e^{-\frac{\gamma}{2}} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{2n}} = 2\sqrt{N} \frac{(2N)!!}{(2N+1)!!} (1 + o(1))$$

и воспользоваться формулой Стирлинга.

Задача 2. Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Доказать, что

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Реш. Воспользуемся определением $\Gamma(s)$ в виде

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \text{ и равенствами}$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots,$$

Задача 3. Пусть C - контур, идущий из $+\infty$ вдоль
верхнего края разреза (по положительной полуоси),
обходящего 0 против часовой стрелки по окружности
рядом с началом разреза и идущего вдоль нижнего края разреза к $+\infty$.

$$\text{Доказать: } \int_C \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = (e^{2\pi i s} - 1) \Gamma(s) \zeta(s).$$

Лекция 3 (приср. Остерле) (Завгукета)

Начнем со след. определения. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ - какое-то число, $(f_N), (g_N)$ - две послед-ние мером. ф-ции, опреде. в одной окрестности z_0 . Будем писать, что $f_N \sim g_N$ вблизи z_0 , если существует окрестность U точки z_0 т.ч. $f_N - g_N$ голоморфна в U и сходится к 0 при $N \rightarrow +\infty$ равномерно на U .

Конечно, k -й коэфф. в разложении Тейлора в т. z_0 функции $f_N - g_N$ стремится к нулю при $N \rightarrow +\infty$. Еще раз напомним формулу сдвига для $\xi_N(s)$.

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} = \xi_N(s) + \frac{s}{2!} \xi_N(s+1) + \frac{s(s+1)}{3!} \xi_N(s+2) + \dots$$

Что происходит вблизи точки $s = -1$? Имеем:

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} \sim \xi_N(s) + \frac{s}{2!} \xi_N(s+1) + \frac{s(s+1)}{3!} \xi_N(s+2)$$

(оставшиеся члены $\rightarrow 0$). Аналогично,

$$\frac{N^{-s}}{s} \sim \xi_N(s+1) + \frac{(s+1)}{2!} \xi_N(s+2)$$

$$\frac{N^{-1-s}}{s+1} \sim \xi_N(s+2)$$

получается нечто вроде треугольной системы.

$$\begin{pmatrix} \frac{N^{1-s}}{s-1} \\ \frac{N^{-s}}{s} \\ \frac{N^{-1-s}}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s/2! & s(s+1)/3! \\ 0 & 1 & (s+1)/2! \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_N(s) \\ \xi_N(s+1) \\ \xi_N(s+2) \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу в виде $f(A)$,

где $A = \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$f(t) = \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \dots = \frac{e^t - 1}{t}$$

Что будет обратной матрицей? $f^{-1}(A) = g(A)$,

где $g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$. Там естественные образы
возникают числа Бернулли B_n :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

Значит,
$$\begin{pmatrix} \xi_N(s) \\ \xi_N(s+1) \\ \xi_N(s+2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} B_0 & B_1 s & \frac{B_2}{2!} s(s+1) \\ 0 & B_0 & B_1(s+1) \\ 0 & 0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{N^{1-s}}{s-1} \\ \frac{N^{-s}}{s} \\ \frac{N^{-s+1}}{s+1} \end{pmatrix}$$

Возьмем точку $s = -1$. Как интересуют нас

$\xi_N(s)$. Имеем:
$$\xi_N(s) = B_0 \cdot \frac{N^{1-s}}{s-1} + B_1 \cdot N^{-s} +$$

$$+ \frac{B_2}{2!} \cdot \frac{s}{2!} N^{-1-s}$$

Все это же будет и в случае произвольного a

$a \geq 1$ в точке $(-a)$; размер матрицы будет,

конечно, расти. Так имеем:

$$\xi_N(s) \sim \frac{B_0 \cdot N^{1-s}}{s-1} + B_1 N^{-s} + \dots + \frac{B_{a+1}}{(a+1)!} s(s+1) \dots (s+a-2) \cdot$$

$$\cdot N^{-a-s}$$

Подсчитаем теперь $\xrightarrow{k \rightarrow \infty}$ коэфф. разложения Тейлора

в точке $s = -1$. Напомним, что $\xi_N(s)$ — это

разност $\xi(s)$ и конечной суммы. Коэфф. этой

суммы есть
$$\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^k n^k \log(n) +$$

+ некоторый полином от N и $\log N$, не имеющий

свог. члена. + k -й коэфф. разложения

$B_2 \frac{s}{2!}$ в точке $s = -1$.

Итак, k -й коэфф. в разложении ξ в точке (-1)

есть
$$\frac{(-1)^k}{k!} \times \text{регуляриз. предел} \sum_{n=1}^N n (\log n)^k$$

+ k -й коэфф. $B_2 \frac{s}{2!}$ в точке $s = -1$.

Вообще, если $a \geq 1$ - целое, то k -й коэф. в разложении Тейлора $\zeta(s)$ в точке $s = -a$ равен $\frac{(-1)^k}{k!} \times$ регул. коэф. предел $\sum_{n=1}^N n^a (e_n)^k + k$ -й коэффициент в разложении

$$\frac{B_{a+1}}{(a+1)!} s(s+1) \dots (s+a-1)$$

в точке $s = -a$.

Дадим еще одно Определение 1

Регуляризов. значение (предел) послед. сум

$$\sum_{n=1}^N n^a (e_n)^k \text{ станем обозначать}$$

через $\gamma_k^{(-a)}$. Величину $\gamma_k^{(-a)}$ - обобщение константы Стильберса.

Определение 2 Определим степенной ряд

$$\zeta_{\text{рег}}^{(-a)}(s) \text{ через } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \gamma_k^{(-a)} (s+a)^k$$

Теорема Этот ряд сходится в некоторой окрестности τ . $s = -a$. Его сумма продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$, причем (при целом $a \geq 0$)

$$\zeta(s) = \zeta_{\text{рег}}^{(-a)}(s) + \frac{B_{a+1}}{(a+1)!} s(s+1) \dots (s+a-1)$$

Эта теорема подготавливает всю нашу деятельность к настоящему элементу.

В качестве примера подыскаем значение $\zeta(s)$ в τ . $s = -a$:

$$\zeta(-a) = (-1)^a \cdot \frac{B_{a+1}}{a+1} \quad \text{В частности, } \zeta(0) = B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(-a) = 0, \text{ если } a - \text{четное}, \quad \zeta(-a) = -\frac{B_{a+1}}{a+1}, \text{ если } a - \text{нечетное.}$$

Кратные дзета-функции

по определению,

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{n_1^{-s_1} n_2^{-s_2} \dots n_r^{-s_r}}$$

Можно ставить вопрос: когда этот ряд с.с. и можно ли продолжить $\zeta(s_1, \dots, s_r)$ на $\mathbb{C}^r$.

Пусть $\sigma_i = \operatorname{Re} s_i$

Лем. Область абсолютной сходимости этого кратного ряда определяется неравенствами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &> 1 \\ \sigma_1 + \sigma_2 &> 2 \\ &\vdots \\ \sigma_1 + \dots + \sigma_r &> r \end{aligned}$$

Д-во. Индукция. Для фиксированного $n_2 > \dots > n_r > 0$ рассмотрим ряд

$$\sum_{n_1 = n_2 + 1}^{\infty} n_1^{-\sigma_1}. \quad \text{Для этого надо, чтобы } \sigma_1 > 1.$$

Оценим эту сумму сверху и снизу:

$$\sum_{n_1 = n_2 + 1}^{+\infty} n_1^{-\sigma_1} \leq \int_{n_2}^{+\infty} x^{-\sigma_1} dx = \frac{n_2^{1-\sigma_1}}{\sigma_1 - 1}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n_1 = n_2 + 1}^{+\infty} n_1^{-\sigma_1} \geq \int_{n_2 + 1}^{+\infty} x^{-\sigma_1} dx \geq \int_{2n_2}^{+\infty} x^{-\sigma_1} dx = \frac{(2n_2)^{1-\sigma_1}}{\sigma_1 - 1}.$$

Итак, ряд $\sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r} n_1^{-\sigma_1} \dots n_r^{-\sigma_r}$ сходится т.ч.т., т.е.

когда с.с. ряд $\sum_{n_2 > \dots > n_r} n_2^{1-\sigma_1-\sigma_2} n_3^{-\sigma_3} \dots n_r^{-\sigma_r}$.

Воспользуемся предположением индукции, получим треб.

Рассмотрим произведение двух обобщенных ζ -ф.:

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{-s_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2^{-s_2}$$

Разобьем пары (n_1, n_2) на три группы:

$$\begin{aligned}\zeta(s_1)\zeta(s_2) &= \sum_{n_1 > n_2} + \sum_{n_1 < n_2} + \sum_{n_1 = n_2} = \\ &= \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2)\end{aligned}$$

Итак, $\zeta(s_1, s_2)$ известно, чтобы выразить произведение $\zeta(s_1)\zeta(s_2)$.

Далее, рассм. более сложный пример

$$\zeta(s_1, s_2)\zeta(s_3) = (?)$$

$$\begin{aligned}\zeta(s_1, s_2, s_3) + \zeta(s_1, s_3, s_2) + \zeta(s_3, s_1, s_2) + \zeta(s_1 + s_3, s_2) \\ + \zeta(s_1, s_2 + s_3)\end{aligned}$$

Это - частный случай shuffle relation для произв. двух кратных дзета-ф-ций.

Какие значения принимает произв. дзета-ф. с цел. т.?

Замечание. $\zeta(s_1, \dots, s_r)$ сходится (абсолютно) в любой точке $(a_1, \dots, a_r)$, где a_i - комплекс.

целые числа с $a_i \geq 2$. Комплексные т.о. числа $\zeta(a_1, \dots, a_r)$ называются числами Делера-Цеттера (или кратными дзета-знач.).

Как-то соотношение для них получ. из st. form, но есть и другие способы. Рассм. их.

Опред. 1 Конечная послед-ть положительных целых чисел называется композицией;

Опред. 2 Композиция назыв. допустимой, если $a_i \geq 2$.

Опред. 3 Композиция $(a_1, \dots, a_r)$ ~~это~~ соответствует следующему бинарному слову.

$$\underbrace{0 \dots 0}_{a_1-1} \underbrace{1 \ 0 \dots 0}_{a_2-1} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{a_k-1} 1 = w(a)$$

Утверждение. Соответствие $a \mapsto w(a)$ является однозначным соотв. между композициями и бинарными словами, не начинающ. на 0 (допускается пустое слово).

$a \mapsto w(a)$ — однозн. соотв. между допустимыми композициями и бинарными словами, не оканчив. на 0 и не начинающ. на 1.

Глубиной композиции a назыв. число ξ , т.е. число единиц в слове $w(a)$. Весом a назыв. велич. $a_1 + \dots + a_k$, т.е. длину бинарного слова $w(a)$.

Будем писать: $a = (a_1, \dots, a_k) \leftrightarrow w(a) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$

имеет место:

(если a — допуст., то

Теорема (М. Концевич): $\xi(a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{t} \int_0^1 (w_{\varepsilon_1} \dots w_{\varepsilon_k})$

Здесь $w_0 = \frac{dt}{t} = f_0(t)dt$,

$$w_1 = \frac{dt}{1-t} = f_1(t)dt$$

$$\text{Интервал} = \int_{1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_k \geq 0} f_{\varepsilon_1}(t_1) \dots f_{\varepsilon_k}(t_k) dt_1 \dots dt_k$$

Пример: $a = (2, 1)$. Тогда $w(a) = 011$. Интервал

$$\text{имеет вид: } \int_{1 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 0} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \int_{1 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 0} \frac{dt_1}{t_1} t_2^{n_2} dt_2 t_3^{n_3} dt_3$$

интеграл равен $\int \frac{dt_1}{t_1} \cdot t_2^{u_2} \cdot \frac{t_2^{u_3+1}}{u_3+1} dt_2$

$1 \geq t_1 \geq t_2 \geq 0$

$$= \int_{1 \geq t_1 \geq 0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{t_1^{u_2+u_3+2}}{(u_3+1)(u_2+u_3+2)} dt_1 = \frac{1}{(u_2+u_3)^2(u_3+1)}$$

$= \frac{1}{u_1^2 u_2}$ где меняются u_1, u_2 ? Очевидно, $u_1 > u_2 > 0$. Значит, исходный

интеграл равен $\sum_{u_1 > u_2 > 0} \frac{1}{u_1^2 u_2} = \zeta(2, 1)$.

Каждому слагаемому соответствует теор. примен. с u_1 и u_2 слагаемых.

Shuffle relations для перемешанных знаменателей

$$\zeta(2) \zeta(2) = \text{It} \int_0^1 \left(\frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t} \right) \times \text{It} \int_0^1 \left(\frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t} \right)$$

It (on Iterated) - интеграл по области $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq 0$.

Здесь можно добавить $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq 0$ и $1 \geq t_3 \geq t_4 \geq 0$.

Как сложить t_1, t_2 и t_3, t_4 ? Можно рассмотреть:

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq t_4,$$

$$t_1 \geq t_3 \geq t_4 \geq t_2$$

$$t_1 \geq t_3 \geq t_2 \geq t_4$$

$$t_3 \geq t_1 \geq t_4 \geq t_2$$

$$t_3 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_4,$$

$$t_3 \geq t_4 \geq t_1 \geq t_2.$$

Самый простой способ:

$$\frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t}, \frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t}$$

$$\frac{dt}{t}, \frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t}, \frac{dt}{1-t}$$

и т.д.

Таблица: $(01) \sqcup (01) = (0101) + (0011) + \dots =$
 $= 2(0101) + 4(0011)$

Композиция, отбросив слова (0101) , есть $(2, 2)$, слова (0011) - $(3, 1)$. Итого, $\zeta(2)\zeta(2) = 2\zeta(2, 2) + 4\zeta(3, 1)$

С другой стороны, stuffle relation даёт:

$$\zeta(2)\zeta(2) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4). \quad \text{Откуда:}$$

$$\zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4)$$

Лекция 4 (пр. Остерле) Ч. августа

В прошлый раз мы ввели понятие композиции $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$ и бинарного слова $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ и построили соответствие между композициями и бинарными словами: $\underline{a} \rightarrow w(\underline{a})$.
Двойственность бинарных слов: если $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ - слово, то бинарное к нему - слово вида $\bar{\varepsilon}_k \dots \bar{\varepsilon}_1$, где $\bar{\varepsilon}_j = 1 - \varepsilon_j$. Оно является и соотв. между дочетными композициями.

Пример: $\underline{a} = (2, 3)$, $w(\underline{a}) = 01001$,

$$\bar{w}(\underline{a}) = 01101 \text{ и } \bar{\underline{a}} = (2, 1, 2).$$

Утверждение: $\zeta(\underline{a}) = \zeta(\bar{\underline{a}})$

(Это соотношение сначала было открыто экспериментально, на численных примерах, в ходе вычислений).

Доказ. $\zeta(\underline{a}) = \text{It} \int_0^1 (\omega_{\varepsilon_1} \dots \omega_{\varepsilon_k}) =$
 $= \int_{1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_k \geq 0} f_{\varepsilon_1}(t_1) \dots f_{\varepsilon_k}(t_k) dt_1 \dots dt_k$ Сделаем
в интеграле
замену переменных:

$s_1 = 1 - t_k, \dots, s_k = 1 - t_1$. Но при замене
имеем: $f_0(1-t) = f_1(t)$, $f_1(1-t) = f_0(t)$, где
 $f_0 = \frac{1}{t}$, $f_1 = \frac{1}{1-t}$. Итоговая

$$\zeta(\underline{a}) = \int_{1 \geq s_1 \geq \dots \geq s_k \geq 0} f_{\bar{\varepsilon}_k}(s_1) \dots f_{\bar{\varepsilon}_1}(s_k) ds_1 \dots ds_k = \zeta(\bar{\underline{a}}).$$

Отметим три ~~момента~~ ^{аспекта} во всей этой Теореме:

(1) Кратные Дзета-функции.

Они определялись в прошлый раз как

$$\xi(s_1, \dots, s_r) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} n_1^{-s_1} \dots n_r^{-s_r} \text{ (Stuffle)}$$

Мы увидим, куда они мером продолж-ся и
можно что-то сказать о них.

② Кратное дзета-значение (Stuffle)

$$\xi(a_1, \dots, a_r), \quad \underline{a} - \text{допустим, комплекс}$$

③ Кратные полилогарифмы
(они еще не определены.) Классический
полилогарифм - функция

$$Li_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^a}, \quad \text{Соответственно,}$$

кратный полилогарифм определяется ра-
венством

$$Li(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r)(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{a_1} \dots n_r^{a_r}},$$

где $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$ - произвольная компози-
ция (не обязательно допустимая), $|z| < 1$.

Кратн. полилог. можно опред. интегриров. инт-

$$Li(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r)(z) = \text{It} \int_0^z (\omega_{\varepsilon_1}, \dots, \omega_{\varepsilon_r}).$$

① - Арифметическое ② - Арифметическое ③ - Геометр.
(т.е. Li удовле- алгебр. - дифф. уравнения).

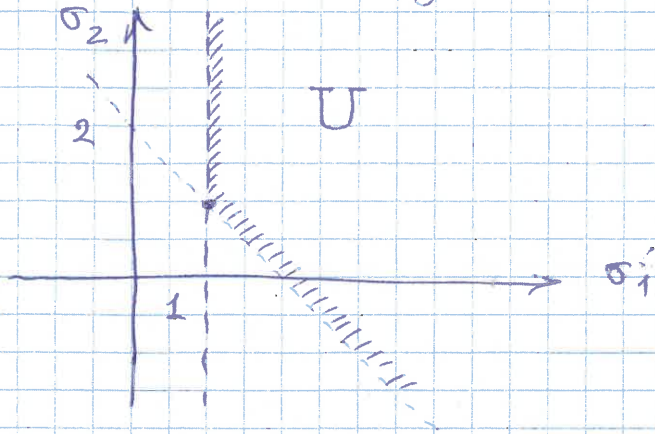
Кратные дзета-значения возникают в теории
фейнмановских интегралов.

Вернемся к вопросу о мероморфичном продол-
жении кратной дзета-функции.

Всю область я буду предположить конкретному
примеру: $r=2$.

$\zeta(s_1, s_2)$ сходится в области U . $\sigma_1 > 1$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 2$.

Изобразим эту область на плоскости (σ_1, σ_2) .



Обратимся к формуле
сдвига:

$$\frac{(n_1-1)^{1-s_1} - n_1^{1-s_1}}{s_1-1} = n_1^{-s_1} + \frac{s_1}{2!} n_1^{-s_1-1} + \frac{s_1(s_1+1)}{3!} n_1^{-s_1-2} - \dots$$

Дополним слагаемые к $n_2^{-s_2}$ и просуммируем.

по всем $n_1 \geq n_2 + 1$. Получим:

$$\frac{1}{s_1-1} \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2^{1-s_1-s_2} = \zeta(s_1, s_2) + \frac{s_1}{2!} \zeta(s_1+1, s_2) + \frac{s_1(s_1+1)}{3!} \zeta(s_1+2, s_2) + \dots$$

Но слева — обобщенная дзета-функция. Если $(s_1, s_2) \in U$,

то

$$\frac{\zeta(s_1+s_2-1)}{s_1-1} = \zeta(s_1, s_2) + \frac{s_1}{2!} \zeta(s_1+1, s_2) + \frac{s_1(s_1+1)}{3!} \zeta(s_1+2, s_2) + \dots$$

Имеем, таким образом, что

Для любой пары (s_1, s_2) за конечное число шагов
 $(s_1, s_2) \rightarrow (s_1+1, s_2) \rightarrow (s_1+2, s_2) \rightarrow \dots$

мы попадем в область абс. сходимости.

Зная все члены $\zeta(s_1+k, s_2)$, $k=1, 2, \dots$, можно
определить $\zeta(s_1, s_2)$.

Итак, $\zeta(s_1, s_2)$ мероморфно продолжается на $\mathbb{C}^2$
и удовлетворяет при всех s_1, s_2 приведенным выше
формулам.

Для функций от большего числа переменных продолжение проводится аналогично по тем же переменным в комплексной области, аналогов ф-ки перенося.

Попробуем понять, что представляют собой полюсы $\xi(s_1, s_2)$. В отличие от ф. 1-го переи., теперь они могут образовать гиперпл.

В $\mathbb{C}$ нет полюсов.

От множит. $\frac{1}{s_1 - 1}$

- полюс $s_1 = 1$

(кратно)

- полюс $\xi(s_1 + s_2 - 1)$, т.е.

$$s_1 + s_2 = 2$$

Далее, слагаясь

формулы дают полюсы: $s_1 + s_2 = 1$,

$s_1 + s_2 = 0, \dots$. Итак, полюсы имеют вид

полюсов: $s_1 = 1, s_1 + s_2 = i, i \in \mathbb{Z}, i \leq 2$.

Однако фактически целые отрицат. числа не возникают.

Каждый образ $\xi(s_1, \dots, s_r)$ мероморфно продолжается на $\mathbb{C}^r$ и имеет полюсы на гиперплоскостях

$$s_1 = 1$$

$$s_1 + s_2 = \text{целое} \leq 2$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = \text{целое} \leq 3$$

$\dots$

$$s_1 + \dots + s_r = \text{целое} \leq r$$

Посмотрим значения $(s_1-1)\zeta(s_1, s_2)$ на прямой $s_1=1$. При $s_2 > 1$ это будет в точности $\zeta(s_2)$ (из ф-лы сдвига), но то же будет и при всех s_2 (?)

Смотрим знач. $(s_1+s_2-2)\zeta(s_1, s_2)$ на прямой $s_1+s_2=2$. Если допустить, что все лауре ф-лы на $s_1+s_2=2$ имеют значение $\frac{1}{s_1-1}$.

Возникшие вопросы (90-е гг.): для каких всех ζ невырожденные (?)

Пусть $\operatorname{Re} s > 2$. Тогда $(s, 0) \in U$. Что такое $\zeta(s; 0) = \sum_{n_1 > n_2 > 0} n_1^{-s} n_2^0 = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{n_1-1} n_1^{-s}$
 $= \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{-s} (n_1-1) = \zeta(s-1) - \zeta(s)$

Теперь возникли $\zeta(0, s)$. Есть Stuffle формула: $\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1+s_2)$, если (s_1, s_2) и $(s_2, s_1) \in U$

Равнозначен, в силу аналог. пред.,

$$\zeta(s)\zeta(0) = \zeta(s, 0) + \zeta(0, s) + \zeta(s)$$

$$\zeta(0, s) = -\frac{3}{2}\zeta(s) - \zeta(s, 0) = -\frac{3}{2}\zeta(s) - \zeta(s-1) + \zeta(s) = -\frac{1}{2}\zeta(s) - \zeta(s-1).$$

Итак:

$$\zeta(s; 0) = \zeta(s-1) - \zeta(s)$$

$$\zeta(0, s) = -\frac{1}{2}\zeta(s) - \zeta(s-1).$$

Пусть $s \rightarrow 0$ в обеих ф-лах.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta(s; 0) = \zeta(-1) - \zeta(0) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta(0, s) = -\frac{1}{2}\zeta(0) - \zeta(-1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Эти функции для продолжения еще до
того, как стало из продолжения. Поэтому
сначала думать, что кратко охоту вообще
невозможно.

Говорят, что $(0,0)$ - точка неопределенности.

Пример: $f(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ - имеет нули

и имеет полюсов пересечения.

Здесь $\lim_{z_1 \rightarrow 0} f(z_1, 0) = 1$, но

$$\lim_{z_2 \rightarrow 0} f(0, z_2) = -1.$$

Детали пока этот вопрос.

Асимптотическое разложение

Пример. Формула Стирлинга.

$$\log n! = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2} \log 2\pi +$$

$$+ \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \quad (\text{ряд можно}$$

продолжить).

Или формулу:

$$\sum_{a \leq n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + g(b)f(b) - g(a)f(a) -$$

$$- \int_a^b g(x) f'(x) dx, \quad g(x) = \frac{1}{2} - \{x\},$$

Полином Бернулли: $B_1 = -\frac{1}{2}$

$a_1 = 1, b = N, f = \log$; тогда

$$\log N! = N \log N - N + 1 + \frac{1}{2} \log N -$$

$$+ \int_1^N B_1(x) \frac{dx}{x}.$$

Последнее слагаемое перенесем в виде

$$\int_1^{+\infty} \bar{B}_1(x) \frac{dx}{x} = \int_N^{+\infty} \bar{B}_1(x) \frac{dx}{x}$$

Можно показать, что $\frac{1}{2} \log 2\pi = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\bar{B}_1(x) dx}{x}$

интеграл

$$\int_N^{+\infty} \bar{B}_1(x) \frac{dx}{x}$$

даёт следующие члены: $\frac{1}{12N} - \frac{1}{360N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$

Определение полиномов B_n

$$\frac{e^{tx} t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x) t^n}{n!}$$

$$B_n(0) = B_n, \quad B'_{n+1} = (n+1) B_n, \quad B_n(1) = B_n, \quad n \geq 2$$

$\bar{B}_n(x)$ — по периодичности

$$-\int_N^{+\infty} \bar{B}_1(x) \frac{dx}{x} = -\left. \frac{\bar{B}_2(x)}{2x} \right|_N^{+\infty} - \int_N^{+\infty} \frac{\bar{B}_2(x)}{2x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{12N} - \int_N^{+\infty} \frac{\bar{B}_2(x)}{2x^2} dx;$$

$$-\int_N^{+\infty} \frac{\bar{B}_2(x)}{2x^2} dx = -\left. \frac{\bar{B}_3(x)}{6x^2} \right|_N^{+\infty} - \int_N^{+\infty} \frac{\bar{B}_3(x)}{6x^3} dx =$$

$$= -\left. \frac{\bar{B}_4(x)}{3 \cdot 4x^3} \right|_N^{+\infty} - \int_N^{+\infty} \frac{\bar{B}_4(x)}{4x^4} dx =$$

$$= \frac{B_4}{12N^3} + \dots = -\frac{1}{360N^3} + \dots$$

В итоге $\log N! = N \log N - N + \frac{1}{2} \log N + \frac{1}{2} \log 2\pi$

$$+ \sum_{k=1}^K \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \cdot \frac{1}{N^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{N^{2K-1}}\right)$$

Но ряд нельзя заменить бесконечным: он

расходится ; его можно оборвать.
Такие разложения и назыв. асимптотическими.

Лемма 5 обнуется (пр. Остерле)

Асимптотические разложения

Пусть (u_N) — послед. конеч. чисел. Пусть, далее,
 $A \geq 0$ — целое число.

Определение. Будем говорить, что (u_N) имеет асимптотическое разложение с точностью N^{-A} , если сущ.

конечное число пар (ℓ, a) , $\ell \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \leq A$,

~~и~~ для каждой пары ^{— тако} конеч. чисел $\lambda_{\ell, a}$, что

$$u_N = \sum_{(\ell, a)} \lambda_{\ell, a} (\log N)^\ell N^{-a} + o(N^{-A})$$

Определение. Будем говорить, что (u_N) имеет асимпт. разложение вразв. Точность, если u_N обладает асимпт. разлож. с точностью до N^{-A} при любом $A \geq 0$.

Разложение Лорана: $\sum \lambda_{\ell, a} L^\ell X^a \in \mathbb{C}[L]((X))$ — имеют конечное число отрицат. членов (кон. число отрицат. a), — будем называть формальными разложениями.

Пример. Разложение для $N! = \sum_{k=1}^N \log k$ ~~не~~ имеет такого асимптотич. разложения:

$$X^{-1} L - X^{-1} + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} X^{2k+1}$$

(ка сходимость не обращаем внимания).

Замечание 1. Если (u_N) имеет такое ас. разлож. вразв. порядка, то у (u_N) имеется регулярное вразв. (или будет число $\lambda_{0,0}$; в рассм. выше примере $\lambda_{0,0} = \frac{1}{2} \log 2\pi$).

Замечание 2. Множество таких послед-тей (u_N) образует векторное пространство, и оно инвариантно относительно умножения двух послед-тей

(ко при упрощении надо быть осторожным).

При 2-ве ф-лы Стирлинга мы использовали лишь одно: разложение Маклорена; относит. ф. $\log x$ мы использовали следующее:

- 1) первообразная $\log x$ имеет вид $x \log x - x$;
- 2) производные $\log x$ являются разрывными степенями $\frac{1}{x}$ (более общо, линейными комб. величинами вида $\frac{(\log a)^l}{x^a}$ с разрывными a, l).

Пример любая функция вида $x^a (\log x)^b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, обладает этими же свойствами 2-го;

$$1) \int x^a (\log x)^b dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} (\log x)^b - \int \frac{x^{a+1} (\log x)^{b-1}}{a+1} \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\log x)^b - \frac{1}{a+1} \int x^a (\log x)^{b-1} dx \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{(\log x)^b}{x} dx = \frac{1}{b+1} (\log x)^{b+1} \quad \text{Далее,}$$

$$2) \frac{d}{dx} (x^a (\log x)^b) = a x^{a-1} (\log x)^b + b x^{a-1} (\log x)^{b-1}$$

и т.д. ? - и - ?

Следовательно, ф-ция вида $\left(\sum_{n=1}^N x^n (\log x)^b \right)_N$ обладает асимптот. разложением произвольного порядка.

Лемма. Пусть (n_N) - послед-ть, стремящаяся к асимпт. разложению произвольного порядка. Тогда это же справедливо и для послед-ти (v_N) , $v_N = \sum_{n=1}^N n_n$.

2-во. Отсюда указ. разложение для v_N с точностью до N^{-A} , отбрасываемое от разложения (n_N) ~~того же~~ порядка N^{-A-1} .

$$u_N = \sum_{(e,a)} (\log N)^e N^{-a} + \bar{O}(N^{-A}).$$

Но если $x_N = \bar{O}(N^{-A-1})$, то

$$\sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n = \text{const} - \bar{O}(N^A).$$

отсюда следует утверждение.

Пусть $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ — произвольный набор,
и пусть $\underline{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^r$ — порядки
производных, в которых хотим считать
кратную дзетту.

$\gamma_{\underline{k}}(\underline{a})$ — по определ. — регуляризов. предел,
послед-ним
$$\sum_{N > n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{(\log n_1)^{k_1} \dots (\log n_r)^{k_r}}{n_1^{a_1} \dots n_r^{a_r}}$$

Вопрос: он существует? Это след. из леммы.

На примере двух переменных: имеем:

$$u_N = \sum_{n_2=1}^{N-1} \frac{(\log n_2)^{k_2}}{n_2^{a_2}} \quad \text{— имеет ас. разл. прирост порядка}$$

Тогда ~~разл.~~ $\sum_{N > n_1 > 0} \frac{(\log n_1)^{k_1}}{n_1^{a_1}} u_N$ — имеет

ас. разлост. и
$$\sum_{N > n_1 > 0} \frac{(\log n_1)^{k_1}}{n_1^{a_1}} u_{n_1} \quad \text{также имеет}$$

разлост. Но последняя сумма имеет

$$\sum_{N > n_1 > n_2 > 0} \frac{(\log n_1)^{k_1} (\log n_2)^{k_2}}{n_1^{a_1} n_2^{a_2}}$$

Пример: Если $\underline{a}$ — в области ск-сти, то

$$\gamma_{\underline{k}}(\underline{a}) = \zeta(\underline{k})(\underline{a})(-1)^{|\underline{k}|} -$$

с точностью до знака это действительное
производные дзетты.

Числа $\gamma_k^{(a)}$ называются кратными константами Стилькса (Multiple Stiltjes constants),

По ним можно составить формальные ряды

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^r} \frac{(-1)^{|k|} \gamma_k^{(a)}}{k!} (s-a)^{\underline{k}},$$

$$\text{где } \underline{k}! = k_1! \dots k_r!, \quad (s-a)^{\underline{k}} = (s-a_1)^{k_1} \dots (s-a_r)^{k_r}$$

($\mathbb{N}^r$ значит $(\mathbb{N} \cup \{0\})^r$?)

Теорема Потряд ξ сходится в окрестности точки a

Его сумма мероморфно продолжается на $\mathbb{C}^r$ до функции $\xi_{\text{reg}}^{(a)}(s)$.

Вопрос как связаны $\xi(s)$ и $\xi_{\text{reg}}^{(a)}(s)$.

Пример $\square$ $r=1$. Вдеее

$$\xi(s) = \begin{cases} \xi_{\text{reg}}^{(a)}(s), & \text{если } a \geq 2; \\ \frac{1}{s-1} + \xi_{\text{reg}}^{(a)}(s), & \text{если } a = 1; \\ \xi_{\text{reg}}^{(a)}(s) + \frac{B_{1-a}^*}{1-a} s(s+1) \dots (s+a-1), & a \leq 0, \end{cases}$$

B^* - столбец до знака - числа Бернулли.

$$\text{Положим } \xi_{<N}(s_1, s_r) = \sum_{N > n_1 > \dots > n_r > 0} n_1^{-s_1} \dots n_r^{-s_r},$$

$$\xi_{\geq N}^*(s_1, \dots, s_r) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq N} n_1^{-s_1} \dots n_r^{-s_r}$$

В случае $r=1$ имеем, очевидно:

$$\xi_{<N}(s) + \xi_{\geq N}^*(s) = \xi(s).$$

В многомерном случае возникают более сложные комбинаторные ф-лы, связывающие

$\xi_{<N}$ и $\xi_{\geq N}^*$. В случае $r=2$ они имеют такой вид.

Множество пар (u_1, u_2) такое, что $N > u_1 > u_2 > 0$
 есть: (лен-во всех пар (u_1, u_2) , для которых
 $u_1 > u_2 > 0$) — (лен-во пар, где $u_1 > u_2 > 0$ и $u_1 \geq N$)
 $= \{ u_1 > u_2 > 0 \} - \{ u_1 \geq N, u_2 \text{ — любое} \} +$
 $+ \{ u_2 \geq u_1 \geq N \}$. Значит,

$$\xi_{<N}(s_1, s_2) = \xi(s_1, s_2) - \xi_{\geq N}^*(s_1) \xi(s_2) + \xi_{\geq N}^*(s_2, s_1)$$

Комбинаторная формула

$$\xi(s_1, \dots, s_r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \xi_{\geq N}^*(s_i, s_1, \dots, s_r) \xi(s_{i+1}, \dots, s_r)$$

(слагаемое с $i=0$ отвечает $\xi(s_1, \dots, s_r)$).

Напомним ф-лу сдвига (будем рассм. только слу-
 чай $r=2$):

$$\frac{\xi(s_1 + s_2 - 1)}{s_1 - 1} = \xi(s_1, s_2) + \frac{s_1}{2!} \xi(s_1 + 1, s_2) + \frac{s_1(s_1 + 1)}{3!} \xi(s_1 + 2, s_2) + \dots$$

Но для аналог для $\xi(s)$ суммируя по $u > N$;
 то же можно написать и здесь:

$$\frac{\xi_{\geq N}(s_1 + s_2 - 1)}{s_1 - 1} = \xi_{\geq N}(s_1, s_2) + \frac{s_1}{2!} \xi_{\geq N}(s_1 + 1, s_2) + \dots$$

Лекция 6 августа (пр. Остерле)

Я дам лишь набросок доказательства.

Будем считать $\xi_{\geq N}$; $n_1 > n_2 > \dots > n_r > N$.

У нас есть формула Эйлера:

$$\xi(\underbrace{s_1 + s_2 - 1, s_3, \dots, s_r}_{s_1 - 1})_{\geq N} = \xi_{\geq N}(s_1, \dots, s_r) + \\ + \frac{s_1}{1!} \xi_{\geq N}(s_1 + 1, s_2, \dots, s_r) + \dots$$

Как нужно приближение для след. строка:

заданной точности: N^{-A} . Вместе слова придем к треугольной системе; ее можно разрешить.

При обращении появится матрица с числами Бернулли.

Также уже возникали величины $\xi_{\geq N}^*$, отвечающ. объекту суммир. $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq N$. Здесь все то же, но обратная матрица будет иметь несколько иной вид: числа Бернулли заменятся на $B_n^* = (-1)^n B_n$.

Что с $\xi_{\leq N}$, отв. $n_1 > n_1 > \dots > n_r > 0$? Для этой величины есть комбинаторная формула, выражающая $\xi_{\leq N}$ через $\xi_{\geq N}^*$.

Посмотрим, что получается в данном случае для точки $(1, 1, \dots, 1)$

$$\xi(s_1, \dots, s_r) = \sum_{i=0}^r \frac{\xi_{\geq N}^*(s_{i+1}, \dots, s_r)}{(s_1 - 1) \cdots (s_1 + \dots + s_i - 1)}$$

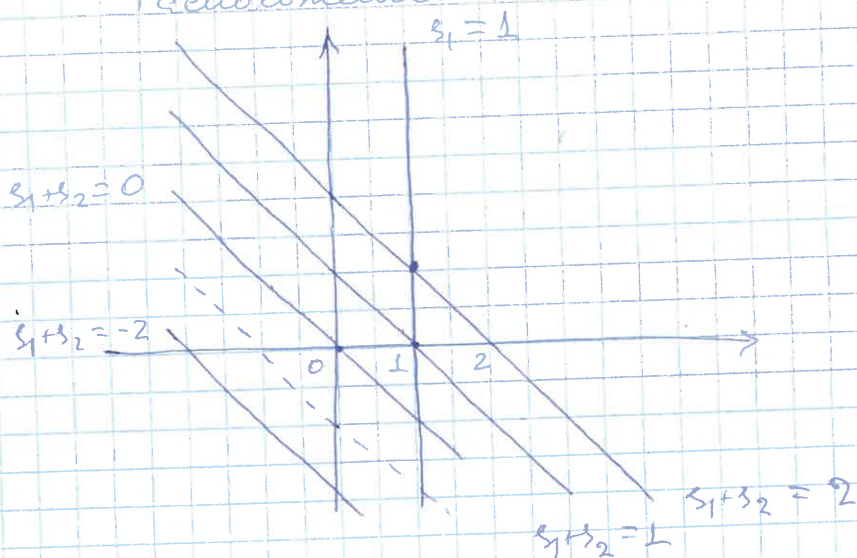
$$\text{Если } r=1, \text{ то } \xi(s) = \xi_{\geq N}^*(s) + \frac{1}{s-1} = \\ = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \gamma_k (s-1)^k, \\ \gamma_k = \left(\sum_{1 \leq n_1 < N} \frac{(\log n_1)^k}{n_1} \right)_{\geq N}$$

В случае $\epsilon = 2$ будем иметь:

$$\xi(s_1, s_2) = \xi_{(1,1)}^{\text{reg}}(s_1, s_2) + \frac{\xi_{(1)}^{\text{reg}}(s_2)}{s_1 - 1} + \frac{1}{(s_1 - 1)(s_1 + s_2 - 1)^2}$$

Это соотношение верно (мероморфно) всюду на $\mathbb{C}$.

Расположение полюсов:



$$(s_1 - 1) \xi(s_1, s_2) \Big|_{s_1=1} = \xi_{(1)}^{\text{reg}}(s_2) + \frac{1}{s_2 - 1} = \xi(s_2)$$

Аналогично,

$$(s_1 + s_2 - 2) \xi(s_1, s_2) \Big|_{s_1 + s_2 = 2} = \frac{1}{s_1 - 1}$$

Итак, $\xi_{(1,1)}^{\text{reg}}(s_1, s_2)$ определена рядом, сходящимся в окрестности $(1,1)$, но она не является голоморфной всюду в $\mathbb{C}^2$: она имеет полюсы на прямых $s_1 + s_2 = 1$, $s_1 + s_2 = 0$, $s_1 + s_2 = -2$, и т.д.

$$\xi_{(1,1)}^{\text{reg}}(s_1, \dots, s_\epsilon) = \sum_{i=0}^{\epsilon} \frac{(-1)^i \xi(s_1 + i, \dots, s_\epsilon)}{(s_1 - 1)(s_1 + s_2 - 2) \dots (s_1 + s_{i-1} - i)}$$

Выразим регуляризов. дзета-функцию через кратную

для $\epsilon=2$ обобщенную ξ -ту:

$$\xi_{(1,1)}^{\text{reg}}(s_1, s_2) = \xi(s_1, s_2) - \frac{\xi(s_2)}{s_1 - 1} - \frac{1}{(s_1 - 1)(s_1 + s_2 - 2)}$$

$$= \xi(s_1, s_2) - \frac{\xi(s_2)}{s_1 - 1} + \frac{1}{(s_2 - 1)(s_1 + s_2 - 2)} - \text{это согласуется с}$$

привед. выше формулой.

Сформулируем следующую теорему

Пусть $B_n^* = (-1)^n B_n$, $(s)_k = \begin{cases} s(s+1)\dots(s+k-1), & k \geq 1, \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{s-1}, & k = -1 \end{cases}$

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\xi_{\underline{a}}^{\text{reg}}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \zeta(s_1+1, \dots, s_n) \times \\ \times \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq -1 \\ k_1 + \dots + k_n + a_1 + \dots + a_n = 0}} \frac{B_{k_1+1}^*}{(k_1+1)!} \dots \frac{B_{k_n+1}^*}{(k_n+1)!} \times (s_i)_{k_i} (s_i + s_{i-1} + k_i)_{k_{i-1}} \times \\ \times \dots \times (s_i + \dots + s_1 + k_i + \dots + k_n)_{k_1}$$

Его доказательство опирается на комбинаторную формулу; многократное обращение матрицы приводит к появлению произведения чисел Бернулли.

Пример. Разложение $\xi_{(0,0)}^{\text{reg}}(s_1, s_2)$. Имеем

$$\xi_{(0,0)}^{\text{reg}}(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2) - \zeta(s_2) B_1^* + \frac{B_2^*}{2!} \frac{s_2}{s_1 + s_2} + \\ + (B_1^*)^2 + \frac{B_2^*}{2!} \frac{s_1 + s_2 - 1}{s_2 - 1}$$

(Какие варианты для $k_1, k_2 \geq -1$, т.е. $k_1 + k_2 + 0 + 0 = 0$: $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$).

К чему приводит близость $(0, 0)$? Каким образом лишь за счет слагаемых $\frac{B_2^*}{2!} \cdot \frac{s_2}{s_1 + s_2}$;

$$\zeta(s_1, s_2) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{s_2}{s_1 + s_2} + \text{голоморфная часть.}$$

Эти ф-лы показывают характер особенностей вблизи точки координатности $(0, 0)$ (затронутое (s_1, s_2) к $(0, 0)$ по разным направлениям, можно получить разные ответы, и с этим много можно поиграть).

p -адический случай, (Куботы-Леопольд)

Есть p -адические гамма- и дзета-функции.

Соответств. возникают p -адические константы Стильерса.

Константы γ_k назывались как регуляриз. пределы

$$\sum_{n=1}^N \frac{(\log n)^k}{n}$$

В p -адическом случае возникнут пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p^*} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^N} \frac{(\log_p a)^i}{a} \right), \quad p^* - \text{какая-то большая степень } p.$$

Конечные поля

$$\left(\sum \log n \right)^{\text{reg}} = -\zeta'(0) = \frac{1}{2} \log 2\pi \quad \text{— Голбоуна сфера}$$

$$\left(\prod_{n=1}^N n \right)^{\text{reg}} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{в конечном поле } \mathbb{F}_p \text{ (} p\text{-простое)}$$

$$\prod_{n=1}^{p-1} n = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \equiv -1, \text{ т.е. } \frac{1}{2} \log 2\pi$$

$n=1$ для $\mathbb{F}_p$ заменяется на -1

Аналогично

$$\left(\sum n \log n \right)^{\text{reg}} = \zeta(-1) \quad \text{— ответ } \prod_{n=1}^N n^4$$

В конечном поле

$$c_p = \prod_{n=1}^{p-1} n^n \pmod{p}; \quad c_3 = 1, \quad c_5 = 3 \text{ и т.д.}$$

Эти числа ведут себя более сложно;

они возникают в арифмет. якобианов.

Критерий Ли для RH

$$RH \text{ верна} \Leftrightarrow \begin{matrix} c_1 \geq 0, \\ c_2 \geq 0 \end{matrix}$$

$$\text{выполнены пер-ые: } c_3 \geq 0, \dots$$

т.е. c_j — полиномы,

$$c_1 = P(\zeta(0))$$

$$c_2 = P(\zeta(0), \zeta'(0))$$

и т.д.

Но $\xi(0) = -\frac{1}{2}$, $\xi'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$, однако неизвестно, такое $\xi''(0)$. Можно выразить в терминах крайних констант (сильнее).

Они составляют векторное q -в и даже алгебру (всему shuffle product.)