Algebra and Number Theory

Summer school for students

31.07–7.08.2019

Research Center of NRU HSE in Voronovo (Moscow)

Joseph Oesterlé’s series of lectures on Multiple Stieltjes constants and Laurent type expansions of the multiple zeta functions at integer points was based on the recent work of a young indian mathematician, Biswajyoti Saha. This work is available as a preprint on arXiv under the reference arXiv: 1902.04389.

These notes are written by Maxim Korolev (MIAN, Moscow)

Ж. Остерле
Кратные константы Стилтьеса

Лекция 1 (1 августа 2019 г.)

Тема сегодняшнего занятия берет начало в записных книжках Рамануджана. В одной из них, в разделе, следующем за магическими квадратами, встречается формула

$$2\log 2 \;=\; 1 \,+\, \frac{2}{2^3-2} \,+\, \frac{2}{4^3-4} \,+\, \frac{2}{6^3-6} \,+\, \dots$$

(Рамануджан нашел ее, видимо, в возрасте 14-15 лет). Мы попытаемся восстановить метод, которым он пользовался при выводе. Он связан с одним приемом, который называется ускорением (улучшением) сходимости и состоит в следующем. Предположим, что имеется сходящийся ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad a_k > 0. \tag{1}$$

Тогда его сумма совпадает с суммой ряда

$$\frac{a_1}{2} \,+\, \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots), \quad b_n = a_n - a_{n+1}. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если ряд* (1) *сходится, то сходится и ряд* (2), *и их суммы совпадают.*

Доказательство. Оборвем второй ряд на N-м члене:

$$\frac{a_1}{2} \,+\, \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}(a_n - a_{n+1}) \;=\; \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}a_n + \frac{(-1)^{N+1}}{2}a_{N+1}.$$

Поскольку первый ряд сходится, $a_{N+1} \to 0$ при $N \to +\infty$. Отсюда следует искомое утверждение.

Применим этот прием к ряду

$$\log 2 \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

Здесь

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n \;=\; \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \;=\; \frac{1}{n(n+1)}.$$

Избавляясь от двоек в знаменателях формулы (2), получаем:

$$2\log 2 \;=\; 1 + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \dots.$$

Этот ряд по-прежнему знакопеременный, но сходится быстрее, чем исходный. Сгруппируем в нем слагаемые по два, начиная со второго:

$$2\log 2 \;=\; 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{4^3 - 4} + \frac{1}{6^3 - 6} + \ldots$$

Что получится, если применить этот прием дважды? Придем к формуле

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \;=\; \frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{1}{4}(c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots), \quad c_n = b_n - b_{n+1}.$$

В частности, для рассмотренного примера

$$b_n \;=\; \frac{1}{n(n+1)}, \quad c_n \;=\; \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Так можно улучшать сходимость и далее. Действуя таким образом, Рамануджан смог вычислить $\log 2$ с высокой точностью, используя сравнительно небольшое число членов ряда.

Рассмотрим теперь заведомо расходящийся ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots$$

и применим к нему (формально) тот же прием. Здесь $a_n = n$, так что $b_n = a_n - a_{n+1} = -1$, и его "сумма" совпадает с суммой

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots).$$

Далее, $c_n = b_n - b_{n+1} = 0$, так что искомая сумма равна

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{4}.$$

На самом деле подобные рассуждения дают способ для мероморфного продолжения дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость. Именно это по сути и проделал Рамануджан, не владея такими понятиями, как мероморфное продолжение, теорема Коши о вычетах и т.д. Вместо $\zeta(s)$ он рассматривал суммы

$$S_r \;=\; \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots$$

и

$$S_r' \;=\; \frac{1}{1^r} - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \frac{1}{4^r} + \ldots,$$

где $r > 1$. Как они связаны между собой? Имеем:

$$(1 - 2^{1-r})S_r \;=\; S_r'.$$

Итак, чтобы продолжить S_r, достаточно продолжить S_r'. Но ряд S_r' – знакопеременный, и к нему можно применить прием улучшения сходимости. Ясно также, что при заданном r этот прием можно применять многократно, и после конечного числа шагов у нас получится ряд, сходящийся в обычном смысле. Так получится продолжение S'_r на все вещественные числа. Но все то же самое можно проделать и для комплексных значений r.

В качестве упражнения можно посчитать значения $\zeta(0)$ и $\zeta(-1)$. Действительно, имеем: $\zeta(0) = S_0 = -S'_0$. Но

$$S'_0 \;=\; 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots, \quad a_n = 1, \quad b_n = 0,$$

так что описанный выше прием дает:

$$\zeta(0) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$\zeta(-1) = S_{-1} = -\frac{1}{3}S'_{-1}, \quad S'_{-1} \;=\; 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \;=\; \frac{1}{4},$$

откуда

$$\zeta(-1) \;=\; -\frac{1}{12}.$$

Применяя этот метод, можно показать, что все числа $\zeta(1-n)$ при целых $n \geqslant 1$ являются рациональными. Более того, справедливы формулы:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(1-2n) \;=\; -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(-2n) = 0,$$

где B_{2n} – числа Бернулли.

Примеры показывают, что хотя их сходимости ряда (1) следует сходимость (2), обратное, вообще говоря, неверно: ряд (2) может сходиться, но ряд (1) может быть расходящимся. Однако было бы весьма желательно иметь утверждение, подобное теореме 1, справедливое в обе стороны. Ьакое утверждение можно сформулировать, но предварительно надо несколько изменить определение сходимости ряда.

Определение. Будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{3}$$

суммируем по Абелю, если ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$$

сходится (в обычном смысле) для всех x с условием $0 \leqslant x < 1$ и его сумма $f(x)$ имеет предел при $x \to 1$. Этот предел и называется суммой (по Абелю) исходного ряда. Рассмотрим следующий пример. Пусть $u_n = (-1)^{n+1}$, так что

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \;=\; 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Тогда

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n \;=\; -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \;=\; -\frac{(-x)}{1-(-x)} \;=\; \frac{x}{1+x},$$

если $0 \leqslant x < 1$. Но если x стремится к единице, то предел $f(x)$ существует:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Это и есть сумма по Абелю исходного ряда.

Имеет место

Теорема 2 (Абель). *Если ряд* (3) *сходится в обычном смысле, то этот ряд сходится и по Абелю, и его сумма в обычном смысле совпадает с его суммой по Абелю.* (Это означает, что суммирование по Абелю расширяет класс рядов, которые можно просуммировать)

Доказательство. Выбором первого слагаемого можно добиться, чтобы исходный ряд (3) сходился к нулю. Обозначим

$$U_n \;=\; u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n \;=\; U_1 x \;+\; \sum_{n=2}^{+\infty} (U_n - U_{n-1}) x^n \;=$$

$$=\; \sum_{n=1}^{+\infty} U_n x^n \;-\; \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n+1} \;=\; (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} U_n x^n$$

(все ряды, очевидно, сходятся при $0 \leqslant x < 1$, поскольку величины U_n стремятся к нулю и потому ограничены). Далее, пусть $\varepsilon > 0$ дано. Тогда существует N такое, что $|U_n| \leqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Значит,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n\right| \leqslant (1-x)\left(\sum_{n=1}^{N-1} |U_n| \;+\; \frac{\varepsilon\, x^N}{1-x}\right) \leqslant \varepsilon + (1-x) \sum_{n=1}^{N-1} |U_n|.$$

Если x достаточно близко к 1, то второе слагаемое также будет ограничено ε, так что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это и означает, что $f(x) \to 0$, если $x \to 1$. Теорема Абеля доказана.

Теорема 3. *Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность, $b_n = a_n - a_{n+1}$. Ряд*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

суммируем по Абелю тогда, и только тогда, когда суммируем по Абелю ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots,$$

и их суммы A и B связаны равенством

$$A \;=\; \frac{a_1}{2} \;+\; \frac{B}{2}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$|b_n| \;\leqslant\; |a_n| + |a_{n+1}|. \tag{3}$$

Из (3) следует, что если радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

не меньше 1, то то же верно и для радиуса сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Аналогично,

$$|a_n| \leqslant |a_1| + |b_1| + \ldots + |b_{n-1}| \tag{4}$$

при $n \geqslant 2$. Из (4) можно заключить, что радиус сходимости первого ряда не меньше радиуса сходимости второго. Предположим, что оба радиуса сходимости не меньше 1 и обозначим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n.$$

Утверждается, что тогда

$$a_1 x + x g(x) = (1+x) f(x).$$

Действительно, имеем:

$$a_1 x + +g(x) = a_1 x + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})(-1)^{n+1} x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^{n+1} = (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n = (1+x) f(x).$$

Из полученного равенства следует, что предел $g(x)$ при $x \to 1$ существует тогда, и только тогда, когда существует предел $f(x)$ при $x \to 1$, причем $a_1 + B = 2A$ (в случае их существования).

Следствие. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

при любом комплексном s сходится по Абелю к некоторой голоморфной функции.

Доказательство. Действительно, при заданном $s \in \mathbb{C}$ исходный ряд, после конечного числа применений приема ускорения сходимости приводится к ряду, сходящемуся в обычном смысле.

Выведем теперь формулу сдвига (translation formula) для дзета-функции Римана. Прежде всего, покажем, что

$$(n-1)^{1-s} - n^{1-s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s-1)s(s+1)\ldots(s+k-1)}{(k+1)!} n^{-s-k}, \quad n \geqslant 2. \tag{5}$$

В самом деле, согласно обобщенной формуле бинома Ньютона,

$$(n-1)^{s-1} \,=\, n^{1-s}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-s} \,=$$
$$=\, n^{1-s}\left(1+\frac{s-1}{n}+\frac{(s-1)s}{2!\,n^2}+\frac{(s-1)s(s+1)}{3!\,n^3}+\ldots+\frac{(s-1)s(s+1)\ldots(s+k-1)}{(k+1)!\,n^{k+1}}\right)$$

откуда и следует искомое равенство (5). Заметим, что оно справедливо для всех комплексных s. Предположим, что $s>1$ - вещественное число. Тогда, суммируя (5) по всем n, получим:

$$1 \,=\, \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(s-1)s(s+1)\ldots(s+k-1)}{(k+1)!}\big(\zeta(s+k)-1\big)$$

(здесь мы воспользовались тем, что все члены ряда неотрицательны).

Эта формула дает мероморфное продолжение дзета-функции Римана на всю плоскость. Рассуждения здесь похожи на те, которые используются для продолжения гамму-функции Эйлера с помощью функционального уравнения. Для нее при $\operatorname{Re} s>0$ устанавливается равенство $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, так что, зная $\Gamma(s+1)$, можно положить

$$\Gamma(s) \,=\, \frac{1}{s}\,\Gamma(s+1).$$

Так, двигаясь влево, можно в итоге мероморфно продолжить гамма-функцию на всю комплексную плоскость.

Подобное получается и для дзета-функции: имея равенство

$$1 \,=\, (s-1)\big(\zeta(s)-1\big) \,+\, \frac{(s-1)s}{2!}\big(\zeta(s+1)-1\big) \,+\, \ldots$$

и зная значения $\zeta(s+1), \zeta(s+2), \ldots$, можно доопределить с его помощью и значение $\zeta(s)$. Необходимо лишь заметить, что приведенные выше ряды сходятся на всей плоскости ввиду оценки

$$|\zeta(t)-1| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\operatorname{Re} t}} \leqslant \frac{c}{2^{\operatorname{Re} t}}.$$

Лекция 2 (2 августа 2019 г.)

Ряд для дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится при $\mathrm{Re}\, s > 1$, причем на всяком компактном подмножестве в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \sigma$, $\sigma > 1$, он сходится и равномерно (все это следует из неравенства $|n^{-s}| \leqslant n^{-\sigma}$). Значит, в такой полуплоскости он будет голоморфной функцией - как ряд, составленный из голоморфных функций. В частности, его можно дифференцировать любое количество раз. Так, например,

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1.$$

Пусть теперь a – произвольное комплексное число с условием $\mathrm{Re}\, a > 1$. Тогда в точке $s = a$ дзета-функцию можно разложить в ряд Тейлора:

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(a)(s-a)^k.$$

При этом коэффициенты разложения будут определяться формулами

$$c_k(a) = \frac{\zeta^{(k)}(a)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^k}{n^a}.$$

Можно поставить следующие вопросы. Что будет в точке $a = 1$? Очевидно, в ней дзета-функция разлагается в ряд Лорана, но как он выглядит? Какой вид имеет разложение Тейлора в нуле? В отрицательных целых точках? Этими вопросами мы и будем сегодня заниматься.

Прежде всего, разложение Лорана в точке $s = 1$ должно иметь вид

$$\frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \gamma_k (s-1)^k.$$

Определение. Числа γ_k называются константами Стилтьеса.

Как их сосчитать? Приведем такое наивное рассуждение. Допустим на секунду, что у дзета-функции нет полюса в единице. Тогда можно воспользоваться приведенными выше формулами для $c_n(a)$ и получить следующие выражения типа:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^k}{n}.$$

Конечно, эти ряды расходятся и такие выражения не имеют смысла. Однако мы уже знаем, что первая из этих констант, γ_0, совпадает с постоянной Эйлера, так что

$$\gamma_0 = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \log N \right).$$

Это отчасти оправдывает приведенные выше выражения и дает повод ввести следующее

Определение. Пусть $\{u_N\}_{N\geqslant 1}$ – последовательность комплексных чисел. Предположим, что существует полином $P(x,y)$ от двух переменных с нулевым свободным членом, такой, что существует предел

$$\lim_{N\to+\infty}\big(u_N\,-\,P(N,\log N)\big).$$

Назовем этот предел регуляризованным пределом последовательности $\{u_N\}$.

Теорема. *Если такой предел существует, то он единственный.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют два различных полинома P и Q с нулевыми свободными членами, такие, что обе последовательности $u_N - P(N,\log N)$ и $u_N - Q(N,\log N)$ имеют пределы. Но тогда имеет предел при $N\to+\infty$ и разность

$$\big(u_N - P(N,\log N)\big)\,-\,\big(u_N - Q(N,\log N)\big)\,=\,P(N,\log N)\,-\,Q(N,\log N),$$

что невозможно, т.к. $P-Q$ - отличный от нуля полином с нулевым свободным членом.

Пример 1. Регуляризованный предел последовательности сумм

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

равен постоянной Эйлера. Здесь, очевидно, $P(x,y)=y$.

Пример 2. Регуляризованный предел последовательности сумм

$$\sum_{n=1}^{N}\log n$$

равен $\frac{1}{2}\log 2\pi$. Действительно, такая сумма есть логарифм факториала. Пользуясь формулой Стирлинга в виде

$$N!\sim\sqrt{2\pi N}N^Ne^{-N},\quad N\to+\infty,$$

находим:

$$\log N!\,-\,N\log N+N\,-\,\frac{1}{2}\log N\,\to\,\frac{1}{2}\log 2\pi,$$

откуда и следует наше утверждение. Таким образом, здесь $P(x,y)=xy-x+y/2$. Сформулируем теперь следующее утверждение.

Теорема. 1) *Разложение Лорана дзета-функции в точке $s=1$ имеет вид*

$$\frac{1}{s-1}\,+\,\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,\gamma_k(s-1)^k,$$

где γ_k - регуляризованные пределы последовательностей

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^k}{n}.$$

Более точно,

$$\gamma_k \;=\; \lim_{N\to+\infty}\biggl(\sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^k}{n} \;-\; \frac{(\log N)^{k+1}}{k+1}\biggr).$$

В частности, γ_0 совпадает с постоянной Эйлера.

2) *Разложение Тейлора дзета-функции в точке $s=0$ имеет вид*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,\delta_k s^k,$$

где δ_k при $k\geqslant 1$ – регуляризованные пределы сумм

$$\sum_{n=1}^{N}(\log n)^k,$$

и $\delta_k = -\frac{1}{2}$ при $k=0$.

Последнее исключение для $k=0$ не случайно. Вычисляя коэффициенты разложения в точках $s=-1,-2,\ldots$, будем получать два, три и т.д. исключения. Причины этого вскроются позже. Из приведенных формул и примера 2 следует, например, что

$$\zeta'(0) \;=\; -\delta_1 \;=\; -\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Доказательство, которое я приведу, не совпадает с исходным доказательством Стилтьеса; оно проще, чем большинство доказательств, которые можно встретить в учебниках.

Доказательство. Вновь воспользуемся формулой сдвига:

$$\frac{(n-1)^{1-s}-n^{1-s}}{s-1} \;=\; n^{-s} \;+\; \frac{s}{2!}\,n^{-s-1} \;+\; \frac{s(s+1)}{3!}\,n^{-s-2} \;+\ldots,\quad n>1.$$

Просуммируем такие равенства по всем $n>N$, где $N>1$ - заданное число. Получим:

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} \;=\; \zeta_N(s) \;+\; \frac{s}{2!}\,\zeta_N(s+1) \;+\; \frac{s(s+1)}{3!}\,\zeta_N(s+2) \;+\ldots, \tag{1}$$

где обозначено:

$$\zeta_N(s) \;=\; \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \;=\; \zeta(s) \;-\; \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

Далее нам потребуется следующая оценка величины $|\zeta_N(s)|$: если $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$, то $|\zeta_N(s)|\leqslant 2N^{1-\sigma}$. Действительно,

$$|\zeta_N(s)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\sigma} \leqslant \int_N^{+\infty}\frac{dx}{x^\sigma} \;=\; \frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1} \leqslant 2N^{1-\sigma}.$$

Заметим теперь, что все ряды (1) сходятся на любом компактном подмножестве комплексной плоскости. Действительно, если K - такое подмножество, то найдется целое $k_0 \geqslant 0$ такое, что $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{3}{2} - k_0$ для всех $s \in K$. Кроме того, существует постоянная $A = A(K)$ такая, что $|s| \leqslant A$ для всех $s \in K$. Оценим слагаемые ряда (1), отвечающие $k \geqslant k_0$, используя полученное неравенство:

$$\left|\frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{(k+1)!}\,\zeta(s+k)\right| \leqslant 2\,\frac{A(A+1)\dots(A+k-1)}{(k+1)!}\,N^{1-\sigma-k} \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\frac{A(A+1)\dots(A+k-1)}{(k+1)!}\,N^{-1/2+k_0-k}.$$

Эта оценка не зависит от s; полиномиальный рост первого сомножителя компенсируется экспоненциальным убыванием второго. Отсюда и следует сходимость (1).

Однако в действительности мы доказали даже несколько большее. Именно, из наших оценок следует, что при $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$ (и даже при $\operatorname{Re} s > 0$) величина

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} - \zeta_N(s)$$

стремится к нулю, причем эта сходимость равномерная на любом компактном подмножестве полосы $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$.

Чтобы добраться до точки $s = 0$, заметим, что при $\operatorname{Re} s \geqslant -\frac{1}{2}$ последовательность функций

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} - \zeta_N(s) - \frac{s}{2!}\,\zeta_N(s+1)$$

стремится к нулю при $N \to +\infty$, причем эта сходимость равномерная на всяком компакте указанной полосы. И так далее. То же верно и для производных этих функций, а также и для коэффициентов их разложений в ряд Тейлора.

Вычислим k-й коэффициент разложения Тейлора функции

$$\zeta_N(s) - \frac{N^{1-s}}{s-1} = \zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}-1}{s-1} - \frac{1}{s-1}$$

в точке $s = 1$. Домножим для упрощения вычислений функцию на $(-1)^k k!$. Тогда слагаемое

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

даст коэффициент γ_k. Далее,

$$n^{-s} = n \cdot n^{1-s} = n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,(\log n)^k (s-1)^k,$$

так что сумма

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$$

даст в итоге коэффициент

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(\log n)^k}{n}.$$

Наконец, разложение

$$\frac{N^{1-s}-1}{s-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(\log N)^k (s-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(\log N)^{k+1}(s-1)^k$$

после домножения на $(-1)^k k!$ даст коэффициент

$$-\frac{(\log N)^k}{k+1}.$$

В итоге получаем коэффициент

$$\gamma_k - \sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^k}{n} + \frac{(\log N)^k}{k+1}.$$

Но, как отмечалось выше, с ростом N коэффициенты стремятся к нулю. Отсюда заключаем:

$$\gamma_k = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^k}{n} - \frac{(\log N)^k}{k+1}\right),$$

т.е. γ_k действительно являются регуляризованными пределами последовательностей сумм

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^k}{n}.$$

Подобным образом получаются разложения в точках $s = 0, -1, \ldots$. Рассмотрим случай $s = 0$. После несложных преобразований заключаем, что последовательность функций

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{-s}}{2} - \frac{N^{1-s}}{s-1}$$

при $N \to +\infty$ сходится к нулю на равномерно на всяком компактном подмножестве полосы $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$. Следовательно, и коэффициенты разложений Тейлора этих функций также стремятся к нулю с ростом N. Вновь домножим эту функцию на $(-1)^k k!$ и подсчитаем k-й коэффициент разложения в точке $s = 0$. Замечая, что

$$\frac{N^{1-s}}{s-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k s^k, \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}(\log N)^j,$$

находим искомый коэффициент в виде

$$\delta_k - \sum_{n=1}^{N} (\log n)^k + \frac{1}{2}(\log N)^k + N \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j} k!}{j!}(\log N)^j.$$

С ростом N он стремиться к нулю; поэтому числа δ_k при $k \geqslant 1$ равны регуляризованным пределам последовательностей сумм

$$\sum_{n=1}^{N} (\log n)^k.$$

В частности, мы указали в явном виде полином

$$P(x,y) \;=\; -x\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!}\,y^j - \frac{y}{2}.$$

Однако при $k=0$ такой полином имеет отличный от нуля свободный член; это и является причиной того, что случай $k=0$ представляет собой исключение. Однако в том случае

$$\delta_0 \;=\; \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} 1 \,-\, \frac{1}{2} \,-\, N\right) \;=\; -\,\frac{1}{2},$$

так что $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Как отмечалось выше, этот подход годится и для разложения в любой точке.