

Введение в теорию
дзета-функции Римана.

(М. Королев, летняя школа в
учебном центре "Вороново" НИУ ВШЭ,
1-7 августа 2019 г.)

Лекция 1.

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексное число, $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$, $t = \operatorname{Im} s$, $i^2 = -1$. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определяется для указанных s как сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^{\sigma+it}} = \frac{e^{-it \ln n}}{n^{\sigma}},$$

имеем $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\sigma}}$, так что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} = \\ &= 1 + \left. \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right|_1^{\infty} = 1 + \frac{1}{\sigma-1} = \frac{\sigma}{\sigma-1}, \end{aligned}$$

Поэтому ряд для $\zeta(s)$ сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ и равномерно в любой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$, и, т.о., определяет при $\operatorname{Re} s > 1$ аналитическую функцию.

Теорема 1 (тождество Эйлера). В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

где p пробегает по ряду идущие простые числа.

Доказательство. Пусть $X > 2$. Рассмотрим конечное произведение

$$P_X(s) = \prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{p^\sigma} \leq \frac{1}{2^\sigma} \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots,$$

причем каждый из таких рядов сходится абсолютно. Перемножая их попарно, получим:

$$P_X(s) = \prod_{p \leq X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{ds}} + \dots\right) =$$

$$= \sum_n' \frac{1}{(p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k})^s}, \quad \text{где штрих означает суммирование по всем воз-}$$

можным числам $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$, в каноническое разложение которых входят лишь простые, не превосходящие X . В силу основной теоремы арифметики, всякое $n \geq 1$ войдет в последнюю сумму с коэффициентом 0 либо 1, причем всякое $n \leq X$ встретится в ней с единичным коэффициентом. Значит,

$$P_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + R_X(s),$$

$$\text{где } |R_X(s)| \leq \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{X^\sigma} + \int_X^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} =$$

$$= X^{-\sigma} + \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1}. \quad \text{Итак говоря,}$$

$$\prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + O\left(X^{-\sigma} + \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1}\right),$$

где θ - некоторое комплексное число с условием $|\theta| \leq 1$. Устранив X и бесконечности, получим требуемое. $\square$

В дальнейшем мы не раз будем пользоваться следующим утверждением:

Лемма 1 (формула суммирования Абеля).

Пусть $a < b$, и пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел $\{c_n\}$, $a < n \leq b$, справедливо тождество

$$\sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = C(b) f(b) - \int_a^b C(u) f'(u) du,$$

$$\text{где } C(u) = \sum_{a < n \leq u} c_n,$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} C(b) f(b) - \sum_{a < n \leq b} c_n f(n) &= \sum_{a < n \leq b} c_n f(b) - \\ &- \sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = \sum_{a < n \leq b} c_n (f(b) - f(n)) = \\ &= \sum_{a < n \leq b} c_n \int_n^b f'(u) du = \sum_{a < n \leq b} c_n \int_a^b f'(u) g(n; u) du, \end{aligned}$$

где функция $g(n; u)$ определена следующим образом:

$$g(n; u) = \begin{cases} 1, & n \leq u \leq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теперь, меняя порядок суммирования

и интегрирования, преобразуем последнее выражение:

$$\int_a^b f'(u) \sum_{a \leq n \leq u} c_n g(n; u) du = \int_a^b f'(u) \left(\sum_{a \leq n \leq u} c_n \right) du$$

$$= \int_a^b f'(u) C(u) du, \text{ что и требовалось. } \square$$

Следствие (формула суммирования Эйлера)

Пусть $a < b$, $g(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, и пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\sum_{a \leq n \leq b} f(n) = \int_a^b f(u) du + g(b) f(b) - g(a) f(a) - \int_a^b g(u) f'(u) du$$

Доказательство. Полагая $c_n \equiv 1$ в формуле суммирования Абеля и замечая, что $C(u) = [u] - [a] = u - a - \{u\} + \{a\} = u - a + g(u) - g(a)$, после несложных преобразований легко получаем требуемое. $\square$

Следующая теорема даёт новое представление для дзета-функции в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

Теорема 2. При любом s с условием $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо тождество

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{g(u) du}{u^{s+1}}$$

Доказательство. Пусть $N > 1$. Тогда,

применяя формулу суммирования Эйлера, будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &= 1 + \sum_{1 < n \leq N} \frac{1}{n^s} = 1 + \int_1^N \frac{du}{u^s} + \\ &+ \frac{\rho(N)}{N^s} - \frac{\rho(1)}{1^s} + s \int_1^N \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{u^{1-s}}{1-s} \Big|_1^N + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N^s} + s \int_1^N \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du \\ &= \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N^s} + s \int_1^N \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Re} s > 1$, при $N \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du. \quad \square$$

Несложно заметить, что последний интеграл сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du \right| &\leq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\sigma+1}} = -\frac{u^{-\sigma}}{2\sigma} \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\sigma} < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, все слагаемые правой части тождества теоремы 2 определены в области $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$. Поэтому это тождество мероморфно продолжает дзета-функцию Римана в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$. Точка $s=1$ оказывается для $\zeta(s)$ полюсом первого порядка.

Чтобы продолжить $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость, введем в рассмотрение кси-функцию Римана

$$\xi(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Имеет место

Теорема 3 Функция $\xi(s)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением для гамма-функции:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Пусть $n \geq 1$ — целое число. Положив в интеграле $x = \pi n^2 y$, получим:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} (\pi n^2 y)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} \pi n^2 dy = \\ &= \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy, \end{aligned}$$

откуда

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy.$$

Просуммируем обе части последнего равенства по n ; получим:

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} \right) dy \end{aligned}$$

Таким образом, подынтегральное выражение принимает вид

$$x^{-\frac{s}{2}-1} \omega\left(\frac{1}{x}\right) = x^{-\frac{s}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x} \omega(x) \right) \\ = \frac{1}{2} x^{-\frac{s+1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \omega(x),$$

а сам интеграл - вид

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \omega\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}} dx \\ - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}} \omega(x) dx = \\ = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}} \omega(x) dx.$$

Окончательно получим:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \times \\ \times \omega(x) dx,$$

$$\xi(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s) = \\ = 1 + s(s-1) \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \omega(x) dx.$$

Поскольку

$$0 < \omega(x) = e^{-\pi x} + e^{-4\pi x} + e^{-9\pi x} + \dots < \\ < e^{-\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi x n} = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} < 2e^{-\pi x},$$

последний интеграл сходится при любых комплексных s . Поэтому полученное равенство продолжается $\xi(s)$ на всю комплексную плоскость. Остается заметить, что левая часть

этого равенства не меняется при замене s на $1-s$, так что $\xi(s) = \xi(1-s)$. $\square$

Следствие. Дзета-функция Римана мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость.

Доказательство. Из теоремы в 3. при $\operatorname{Re} s > 1$ заключаем:

$$\zeta(s) = \frac{\xi(s)}{s-1} \cdot \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}}{s \Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Однако функции $\xi(s)$ и $\pi^{-\frac{s}{2}}$ — целые; далее, пользуясь представлением $\Gamma(z)$ в виде бесконечного произведения, а именно равенством

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \text{ где}$$

γ — постоянная Эйлера, находим

$$\frac{1}{s \Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{1}{2} e^{\frac{\gamma s}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}},$$

так что и последний сомножитель в представлении $\zeta(s)$ является целой функцией. $\square$

Упражнения

1. Пользуясь формулой суммирования Эйлера, найти асимптотическую сумму

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^N \ln n, \quad \sum$$

при $N \rightarrow +\infty$

2. Доказать следующий вариант формулы суммирования Абеля.

Пусть $a < b$, $\{\lambda_n\}$ — произвольная невозрастающая конечная последовательность с условием $a < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \leq b$. Пусть, далее, $\{c_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$ функции f справедливо равенство:

$$\sum_{a < \lambda_n \leq b} c_n f(\lambda_n) = C(b)f(b) - \int_a^b C(u)f'(u) du,$$

где $C(u) = \sum_{a < \lambda_n \leq u} c_n$.

В частности, в случае $c_n \equiv 1$ имеем:

$$\sum_{a < \lambda_n \leq b} f(\lambda_n) = N(b)f(b) - \int_a^b N(u)f'(u) du,$$

где $N(u) = \sum_{a < \lambda_n \leq u} 1$ — «считающая»

функция последовательности $\{\lambda_n\}$.

3. Докажите, что для дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции f справедливо равенство:

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(u) du + g(b)f(b) - g(a)f(a) - \sigma(b)f'(b) + \sigma(a)f'(a) + \int_a^b \sigma(u)f''(u) du,$$

где $\sigma(u) = \int_0^u g(x) dx$.

4. Докажите, что $\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$.

Лекция 2.

Для всякой целой функции справедлива следующая теорема Вейерштрасса - аналог основной теоремы алгебры:

Теорема 4. Любая целая функция f может быть представлена в виде

$$f(z) = e^{h(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1} \right\},$$

где $h(z)$ - целая функция, $m \geq 0$ - целое число, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - нули $f(z)$, занумерованные в порядке возрастания модулей: $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$.

Если, далее, целое число $p \geq 0$ таково, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+p}}$$

сходится, то $f(z)$ представима и в виде

$$f(z) = e^{h(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{z}{a_n}\right)^p \right\}. \quad \square$$

Можно показать, что в случае $f(z) = \xi(z)$ имеют место равенства $m=0$, $p=1$, $h(z) = az$, где a - постоянная. Поэтому, обозначая нули $\xi(z)$ символом ρ , получаем:

$$\xi(z) = e^{az} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\frac{z}{\rho}}.$$

Перепишем это равенство с равенством

$$\frac{1}{s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma s}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}},$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s-1} \cdot \frac{\xi(s)}{s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \\ &= \frac{e^{As+B}}{s-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \end{aligned}$$

где $A = \gamma \sqrt{\pi} + \frac{\gamma}{2} + a$, $B = -a/2$.

Из полученного равенства для $\zeta(s)$ заключаем:

Зета-функция Римана имеет: а) простые нули в точках $s = -2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (т.н.

"кроем" Тривиальные", вещественные нули) и б) нули в точках $s = \rho$ ("нетривиальные",

комплексные нули). Сформулируем ряд свойств последних.

Свойство 1. Если ρ - комплексный нуль $\zeta(s)$, то числа $1-\rho$, $\bar{\rho}$ и $1-\bar{\rho}$ также будут нулями $\zeta(s)$.

Действительно, в силу функционального уравнения $\xi(1-\rho) = \xi(\rho) = 0$. Далее, зная, что

$$\begin{aligned} \overline{\xi(s)} &= 1 + s(s-1) \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{\bar{s}+1}{2}}\right) \omega(x) dx \\ &= \xi(\bar{s}), \text{ находим: } \xi(1-\bar{\rho}) = \xi(\bar{\rho}) = \\ &= \overline{\xi(\rho)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексные нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно вещественной оси и прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Последняя называется в теории взятая — функцией Римана критической прямой. Гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой, т.е. $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ для любого комплексного нуля.

Свойство 2. Все комплексные нули лежат в вертикальной полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Действительно, пусть $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$. В силу тождества Эйлера имеем:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_k \sum_{p_1, \dots, p_k} \frac{1}{(p_1 \dots p_k)^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \text{где } \mu \text{ — арифметическая}$$

функция, определяемая следующим равенством:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа,} \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k, \text{ где } p_1, \dots, p_k \text{ — различные простые числа.} \end{cases}$$

(эта функция называется функцией Мёбиуса)

Очевидно, что $|\mu(n)| \leq 1$ для любого n , так что

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \frac{\sigma}{\sigma-1},$$

откуда $|\zeta(s)| \geq \frac{\sigma-1}{\sigma} > 0$. Следовательно, $\zeta(s) \neq 0$ в области $\operatorname{Re} s > 1$, т.е. $\operatorname{Re} s \leq 1$.

для всякого комплексного нуля ρ . В силу свойства 1 отсюда заключаем, что $\operatorname{Re} \rho \geq 0$

Нули с комплексными значениями действительной

Свойство 3. Все нули ρ - комплексные числа.

Чтобы показать, что промежуток $0 \leq \sigma < 1$ не содержит нулей $\zeta(s)$, воспользуемся формулой теоремы 2:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{J(u)}{u^{s+1}} du \leq \\ &\leq -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{s+1}} = \\ &= -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{s}{1-s} < 0 \end{aligned}$$

Свойство 4 На всяком промежутке вида $[\tau, \tau+1]$, $\tau \geq 2$, содержится не более $c\tau$ ординат нулей $\zeta(s)$, где $c > 0$ - некоторая абсолютная постоянная.

Оставляя этот факт без доказательства, отметим, что на самом деле имеет место более точное утверждение: если $N(\tau)$ - количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq \tau$, то

$$N(\tau) = \frac{\tau}{2\pi} \ln \frac{\tau}{2\pi} - \frac{\tau}{2\pi} + O(\ln \tau)$$

при $\tau \rightarrow +\infty$. Это асимптотическое равенство называется формулой Римана-Мангольдта.

Свойство 5 Ряд $\sum \frac{1}{|\rho|}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{|\rho|^{1+\varepsilon}}$ сходится при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Ряд

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{1}{\rho} \text{ сходится.}$$

Качество у Дзета-функции Эйлера произведения указывает на связь $\zeta(s)$ с простыми числами. Цель приводимых ниже утверждений состоит в раскрытии этой связи.

Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Прологарифмируем эйлерово произведение для $\zeta(s)$, а затем продифференцируем полученное равенство. Будем иметь:

$$\ln \zeta(s) = - \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{ks}},$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k p^{ks}} \right) =$$

$$= - \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{ks}}.$$

Заменяя двойную сумму по p и k одной суммой по числам $n \geq 2$, получим:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{где}$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Так определенная функция $\Lambda(n)$ называется функцией Мангольдта. Вот несколько первых её значений: $\Lambda(2) = \ln 2$, $\Lambda(3) = \ln 3$, $\Lambda(4) = \ln 2$, $\Lambda(5) = \ln 5$, $\Lambda(6) = 0$, $\Lambda(7) = \ln 7$, $\Lambda(8) = \ln 2$ и т.д. Она играет большую роль в теории распределения простых чисел.

Положим для $x \geq 0$ величину

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{\sum_{p \leq x} 1}$$

равной количеству

простых чисел, не превосходящих x , т.е.

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Основная задача в теории распределения простых чисел — определить поведение $\pi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Оказывается, однако, что технически гораздо проще изучать не $\pi(x)$, а функцию Чебышева $\psi(x)$, которая определяется следующим образом: $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. (Говорят, что $\psi(x)$ является сумматорной функцией для последовательности значений $\Lambda(n)$, $n \geq 2$.) Связь $\pi(x)$ с $\psi(x)$ описывается следующей теоремой, доказательство которой оставляется в качестве упражнения.

Теорема 5 При $x \rightarrow +\infty$ справедливы следующие соотношения:

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\psi(u)}{u^2 u} du + \underline{O}(\sqrt{x}),$$

$$\psi(x) = \pi(x)x - \int_2^x \frac{\pi(u)}{u} du + \underline{O}(\sqrt{x} \ln x).$$

Следующее утверждение устанавливает связь между чисто арифметическими объектами — простыми числами (функцией Чебышева) и нулями дзета-функции Римана.

Теорема 6 Пусть $x, T \geq 2$. Тогда справедлива "явная" формула:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\sigma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + \underline{O}\left(\frac{x}{T} e^{-2\pi(xT)}\right) + \underline{O}(e^{-2\pi(xT)}).$$

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2 (разрывный множитель Дирихле)

Пусть $a > 0$, $b > 1$, $\pi \geq 2$. Тогда для интеграла

$$J = J(a; b; \pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\pi}^{b+i\pi} \frac{a^s}{s} ds$$

справедливы равенства:

$$J = \begin{cases} 1 + \frac{\theta}{\pi\pi} - \frac{a^b}{b\pi a} & , \text{ если } a > 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{\theta b}{\pi\pi} & , \text{ если } a = 1, \\ 0 + \frac{\theta}{\pi\pi} - \frac{a^b}{b\pi |a|} & , \text{ если } 0 < a < 1, \end{cases}$$

где $|\theta| \leq 1$. Кроме того, в каждом из

случаев выполняется оценка $|J| \leq \frac{a^b}{\pi} (b\pi + 1)$

Доказательство. Докажем сперва последнее неравенство. Пологая в интеграле $s = b + it$, получим:

$$J = \frac{a^b}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^{it}}{b + it} dt, \text{ откуда}$$

$$|J| \leq \frac{a^b}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{b^2 + t^2}} \leq \frac{a^b}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} \leq$$

$$\leq \frac{a^b}{\pi} \left(\int_0^1 dt + \int_1^{\pi} \frac{dt}{t} \right) = \frac{a^b}{\pi} (b\pi + 1).$$

Далее, в случае $a > 1$ рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a^s}{s} ds,$$

где Γ — прямоугольник с вершинами в точках $b \pm i\pi$, $-B \pm i\pi$, где $B > 1$. По теореме Коши о вояетях,

$$I = \operatorname{res}_{s=0} \frac{a^s}{s} = 1.$$

С другой стороны, $I = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$, где

I_k - интегралы по сторонам Γ - отрезкам, соединяющим последовательно точки $\sigma - iT$, $\sigma + iT$, $-B + iT$

и $-B - iT$. Тогда $I_1 = j$.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma + iT}^{-B + iT} \frac{a^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-B}^{\sigma} \frac{a^{\sigma + iT}}{\sigma + iT} d\sigma,$$

откуда

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi T} \int_{-B}^{\sigma} a^{\sigma} d\sigma = \frac{a^{\sigma} - a^{-B}}{2\pi T \ln a} < \frac{a^{\sigma}}{2\pi T \ln a}.$$

Аналогично оценивается и интеграл I_4 .

Наконец,

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-B - iT}^{-B + iT} \frac{a^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{a^{-B + it}}{-B + it} dt,$$

так что

$$|I_3| \leq \frac{a^{-B}}{\pi} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{B^2 + t^2}} < \frac{a^{-B} T}{\pi B}.$$

Таким образом,

$$j + O\left(\frac{a^{\sigma}}{\pi T \ln a} + \frac{a^{-B} T}{\pi B}\right) = 1.$$

Устремив B к бесконечности, получим первое из равенств леммы.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично, но с заменой вершин $-B \pm iT$ контура Γ точками $B \pm iT$.

Наконец, случай $a = 1$ сводится к интегрированию производной арктангенса. $\square$

Упражнения

1. Доказать теорему 5. Указание: начать с равенства

$$\pi(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(\sqrt{x}),$$

2. Доказать, что значение постоянной a в представлении $\xi(s) = e^{as} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) e^{\frac{1}{p}}$ равно $\ln 2, \sqrt{\pi} - \frac{\gamma}{2} - 1$.

Указание. Из равенства

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = a + \sum_p \left(\frac{1}{s-p} + \frac{1}{p} \right) \text{ следует, что}$$

$a = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)}$. С другой стороны, дифференциальное уравнение для $\xi(s)$ влечет равенство

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = - \frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)}, \text{ т.ч. } a = - \frac{\xi'(1)}{\xi(1)}.$$

В то же время из определения $\xi(s)$ находим;

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = 1 - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} + \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \frac{1}{s-1} \right).$$

Из упр. 4 и леммы 1 следует, что последний предел равен γ . Наконец, дифференцируя произведение для $\Gamma(z)$, получим:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right).$$

Остается положить $z = 1/2$ и найти сумму возникающего в правой части ряда.

3. Запишем положительные ординаты комплексных нулей ρ в порядке возрастания:

$$\rho = \rho_n = \beta_n + i\gamma_n, \quad 0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$$

Доказать, что $\gamma_1 > 6 \frac{1}{2}$.

Указание. Из равенств

$$a = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = - \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} \text{ и } \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = a + \sum_p \left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} \right)$$

заключаем: $-2a = \sum \left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} \right)$. Но a - вещественное число, так что

$$-2a = 2|a| = \operatorname{Re} \sum_p \left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} \right) =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_p \left(\frac{1}{1-\beta+i\gamma} + \frac{1}{\beta+i\gamma} \right) =$$

$$= \sum_p \left\{ \frac{1-\beta}{(1-\beta)^2 + \gamma^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right\}$$

(последние ряды, в силу свойств 2 и 5, сходятся абсолютно). Но в силу симметрии нулей (свойство 1), суммы этих рядов совпадают, т.е. $2|a| = \sum_p \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} =$

$$= 2 \sum_{\gamma > 0} \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\frac{1}{2} \leq \beta_1 \leq 1$ (иначе можно рассмотреть нуль $1-\beta_1+i\gamma_1$).

Тогда $2|a| > \frac{2\beta_1}{\beta_1^2 + \gamma_1^2}$, откуда

$$\gamma_1 > \sqrt{\beta_1 \left(\frac{1}{|a|} - \beta_1 \right)} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{|a|} - \frac{1}{2} \right)}.$$

Подставляя значение $|a| = 0,023095708\dots$, получим требуемое.

Лекция 3

Очередным шагом в доказательстве теоремы 6 является следующее утверждение, которое связывает сумматорную функцию $\phi(x)$ коэффициентов ряда

$$-\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

с функциональными свойствами логарифмической производной дзета-функции Римана.

Лемма 3. При любых $x, T \geq 2$ справедливо равенство

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \left(-\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} O_2(xT)\right) + O(O_2(xT)),$$

в котором $\sigma = 1 + \frac{1}{O_1 x}$.

До-во Заменяя логарифмическую производную бесконечным рядом и меняя порядок суммирования и интегрирования, для интеграла I из условия получим равенство:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^s}{s} ds = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{(x/n)^s}{s} ds = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) j\left(\frac{x}{n}, \sigma; T\right), \end{aligned}$$

где j - интегралы из леммы 2. Согласно этой лемме, вклад от чисел n , с условием $|x-n| \leq 1$ оценивается величиной порядка $(O_1 x) O_1 T \ll O_1^2(xT)$. Пользуясь выражением интегралов $j\left(\frac{x}{n}, \sigma; T\right)$, полученным выше, находим;

$$I = \sum_{n < x-1} \Lambda(n) \left\{ 1 + \frac{\theta_n}{\pi T} \left(\frac{x}{n} \right)^e \frac{1}{e_n \frac{x}{n}} \right\} +$$

$$+ \sum_{n > x+1} \Lambda(n) \left\{ 0 + \frac{\theta_n}{\pi T} \left(\frac{x}{n} \right)^e \frac{1}{|e_n \frac{x}{n}|} \right\} + O(e^{-2} x T)$$

$$= \psi(x) + \Delta(x) + O(e^{-2} x T), \text{ где } |\theta_n| \leq 1,$$

так что

$$|\Delta(x)| \leq \frac{x^e}{\pi T} \sum_{|x-n| > 1} \frac{\Lambda(n)}{n^e} \left| e_n \frac{x}{n} \right|^{-1}$$

Если $n \leq \frac{x}{2}$ или $n \geq \frac{3x}{2}$, то $|e_n \frac{x}{n}| \geq e_n \frac{3}{2}$, и вклад таких n в оценку $\Delta(x)$ не превосхо-

дит

$$\frac{x^e}{\pi T e_n \frac{3}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^e} = \frac{x^e}{\pi T e_n \frac{3}{2}} \left(- \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right).$$

Поскольку $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ при $s \rightarrow 1$, то

$$\zeta'(s) \sim - \frac{1}{(s-1)^2} \text{ и } - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}, \text{ и}$$

искомый вклад оценивается величиной по-
рядка $\frac{x}{\pi} e_n x$.

Наконец, вклад от чисел n , $\frac{x}{2} < n < x-1$ и $x+1 < n \leq \frac{3}{2}x$ оцениваем ~~и~~, положив, соот-
ветственно, $n = [x] - \tau$ и $n = [x] + 1 + \tau$, где $1 \leq \tau \leq \frac{x}{2}$. Так получим:

$$\Delta(x) \ll \frac{x}{\pi} e_n x + \frac{x^e}{\pi} \cdot \frac{e_n x}{x^e} \sum_{1 \leq \tau \leq \frac{x}{2}} \left\{ e_n \frac{x}{[x] - \tau} \right.$$

$$+ \left. e_n \frac{[x] + \tau + 1}{x} \right\} \ll \frac{x}{\pi} e_n x + \frac{e_n x}{\pi} \sum_{1 \leq \tau \leq \frac{x}{2}} \frac{x}{\tau}$$

$$\ll \frac{x}{\pi} e_n^2 x, \text{ или завершается доказательство.}$$

В дальнейшем интеграл из условия леммы 3 будет вычислен путем дополнения отрезка $[v-iT, v+iT]$ до некоторого замкнутого контура и применения теоремы Коши о вычетах. Для этого нам потребуется утверждение о поведении логарифмической производной дзета-функции Римана в вертикальной полосе $-1 \leq \operatorname{Re} s \leq 2$.

Лемма 4. Пусть $-1 \leq \sigma \leq 2$, t — вещественное число, $s = \sigma + it$, число s отлично от нуля $\zeta(s)$ и $|s-1| \geq \frac{1}{O(|t|+2)}$. Тогда выполняется равенство

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(O(|t|+2)).$$

Доказательство. Логарифмируя произведение по нулям для $\zeta(s)$ и дифференцируя полученное равенство, находим

$$\ln \zeta(s) = As + B - O(s-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ O\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2n} \right\} + \sum_{\rho} \left\{ O\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{s}{\rho} \right\},$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = A - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Далее, несложно видеть, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right| &\leq \sum_{n \leq |t|+2} \left(\frac{1}{2n+\sigma} + \frac{1}{2n} \right) + \\ &+ \sum_{n > |t|+2} \frac{|s|}{2n(2n-|s|)} \leq \sum_{n \leq |t|+2} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) + \\ &+ (|t|+2) \sum_{n > |t|+2} \frac{1}{2n \cdot n} \ll O(|t|+2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \sum_p \left(\frac{1}{s-p} + \frac{1}{p} \right) + O(e^{-(|t|+2)}).$$

Вычитая из последнего равенства аналогичное соотношение, отвечающее $s = 2+it$, и заме-

чая, что $\frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}} = O(1),$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)} - \frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} &= \sum_p \left(\frac{1}{\sigma+it-p} - \frac{1}{2+it-p} \right) \\ &+ O(e^{-(|t|+2)}) = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \left(\frac{1}{s-p} - \frac{1}{2+it-p} \right) + \\ &+ \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{2-\sigma}{(\sigma+it-p)(2+it-p)} + O(e^{-(|t|+2)}). \end{aligned}$$

Однако $\frac{1}{2+it-p} = \frac{1}{(2-\beta)+i(t-\gamma)} = O(1),$

поскольку $0 \leq \beta \leq 1$; кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{2-\sigma}{(\sigma+it-p)(2+it-p)} &= \frac{2-\sigma}{(\sigma-\beta+i(t-\gamma))(2-\beta+i(t-\gamma))} = \\ &= O\left(\frac{1}{(t-\gamma)^2}\right), \text{ так что} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-p} + O\left(\sum_{|t-\gamma| \leq 1} 1\right) + \\ &+ O\left(\sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{(t-\gamma)^2}\right) + O(e^{-(|t|+2)}). \end{aligned}$$

В силу свойства 3, первый O -член есть $O(e^{-(|t|+2)})$. Сумма по $|t-\gamma| > 1$ оценивается с использованием этого же свойства:

$$\begin{aligned}
\sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n < |t-\gamma| \leq n+1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n < |t-\gamma| \leq n+1} 1 \leq \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{t+n < \gamma \leq t+n+1} 1 + \sum_{t-n-1 < \gamma \leq t-n} 1 \right) \\
&\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O_n(|t|+n)}{n^2} \ll \sum_{n \leq |t|+2} \frac{O_n(|t|+2)}{n^2} + \\
&+ \sum_{n > |t|+2} \frac{O_n(n)}{n^2} \ll O_n(|t|+2).
\end{aligned}$$

Так получается исконое равенство.

Следствие Если $-1 \leq \sigma \leq -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(O_n(|t|+2)\right).$$

Доказательство теоремы 5. Докажем утверждение в случае, когда Γ отстоит от ближайшей ординаты на расстояние, не меньшее, чем δ , $\delta = \frac{c}{O_n \Gamma}$, где $c > 0$ — некоторая абсолютная постоянная,

Положим $\theta = 1 + \frac{1}{O_n x}$ и обозначим через Γ границу прямоугольника с вершинами в точках $\theta \pm i\Gamma$, $-1 \pm i\Gamma$, проходимую против часовой стрелки. Функция $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x}{s}$ имеет внутри Γ следующие особые точки:

- 1) полюс первого порядка в точке $s=0$ с вычетом $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$;
- 2) полюс первого порядка в точке $s=1$ с

вогетам x ;

3) полюса первого порядка в точках $z = \rho$ с вогетамми $-m \cdot \frac{x^\rho}{\rho}$, где m - кратность нуля. По теореме Коши,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \right) \frac{x^z}{z} dz = x - \sum_{|\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\xi'(0)}{\xi(0)}$$

(каждый нуль ρ , $|\rho| \leq T$, встретится в сумме столько раз, какова его кратность).

С другой стороны, этот интеграл равен сумме интегралов $I_1, \dots, I_4$ по отрезкам, соединяющим последовательно вершины $\sigma - iT$ и $\sigma + iT$, $\sigma + iT$ и $-1 + iT$, $-1 + iT$ и $-1 - iT$ и, наконец, $-1 - iT$ и $\sigma - iT$.

Очевидно, I_1 совпадает с интегралом из леммы 3, и поэтому равен

$$\psi(x) + O\left(\frac{x}{T} e^{-2\pi x/T}\right) + O(e^{-2\pi x/T}).$$

Далее, в силу следствия леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1-iT}^{-1+iT} \left(-\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \right) \cdot \frac{x^{-z}}{z} dz = \\ &= \frac{+1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\xi'(-1+it)}{\xi(-1+it)} \cdot \frac{x^{-1+it}}{(-1+it)} dt \ll \\ &\ll \int_{-T}^T e_{\pi}(1+t+2) \cdot \frac{x^{-1}}{\sqrt{1+t^2}} dt \ll \frac{e^{-2\pi} T}{x}. \end{aligned}$$

Интегралы I_2 и I_4 оцениваются одинаково.

Согласно лемме 4,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma+iT}^{-1+iT} \left(\sum_{|\sigma-\rho| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(e^{-2\pi T}) \right) \frac{x^s}{s} ds$$

$$= - \sum_{|\tau-\gamma| \leq 1} x^{i\tau} \int_{-1}^{\epsilon} \frac{x^{\sigma} d\sigma}{(\sigma-\beta+i(\tau-\gamma))(\sigma+i\tau)} + O\left(\frac{x}{\tau} e_{\tau}\right)$$

$$\ll \sum_{|\tau-\gamma| \leq 1} \frac{x^{\epsilon}}{\tau} \int_{-1}^{\epsilon} \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-\beta)^2 + (\tau-\gamma)^2}} + \frac{x}{\tau} e_{\tau}.$$

Ввиду предположения $|\tau-\gamma| \geq \delta$ последний интеграл не превосходит

$$\int_{-1}^{\epsilon} \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-\beta)^2 + \delta^2}} = \left(\int_{-1}^{\beta} + \int_{\beta}^{\epsilon} \right) \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-\beta)^2 + \delta^2}} =$$

$$= \int_0^{1+\beta} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \delta^2}} + \int_0^{\epsilon-\beta} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \delta^2}} \leq 2 \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u^2 + \delta^2}}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{2}{\delta}} \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = 2 e_{\tau} \left(\frac{2}{\delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\delta}\right)^2} \right) \ll$$

$$\ll e_{\tau} \frac{1}{\delta} \ll e_{\tau} e_{\tau} \tau,$$

В силу свойства 3, итоговая оценка I_2 принимает вид:

$$I_2 \ll \frac{x}{\tau} (e_{\tau}) e_{\tau} e_{\tau} \tau \ll \frac{x}{\tau} e_{\tau}^2 x \tau,$$

Суммируя полученные оценки, приходим к искомой формуле для $\phi(x)$.

Пусть теперь $\tau \geq 2$ — произвольное число. Тогда на промежутке $(\tau, \tau+1]$ можно указать точку τ_1 такую, чтобы для нее выполнялось неравенство

$$\min_{\gamma} |\tau_1 - \gamma| \geq \frac{c}{e_{\tau} \tau}, \quad c > 0.$$

Действительно, если между τ и $\tau+1$ не более одной ординаты, то это очевидно.

Если же на этой промежутке имеется не менее двух ординат, то такое π_1 найдется в силу свойства 3 и принципа Дирихле. Именно, если между π и $\pi+1$ — не более $c_1 \varphi(\pi)$ ординат, то найдутся две соседние ординаты γ' и γ'' , $\gamma' \leq \gamma''$, такие, что

$\gamma'' - \gamma' \geq \frac{1}{c_1 \varphi(\pi)}$, полагая $\pi_1 = \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma'')$, получим требуемое с постоянной $c = \frac{1}{2c_1}$.

По доказанному, для такого π_1 имеем:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq \pi_1} \frac{x^\gamma}{\gamma} + O\left(\frac{x}{\pi_1^2} \varphi^2(x \pi_1)\right) + O(e^{2\pi_1})$$

Однако несложно заметить, что

$$\left| \sum_{\pi < |\gamma| \leq \pi_1} \frac{x^\gamma}{\gamma} \right| \leq 2 \sum_{\pi < \gamma \leq \pi_1} \frac{x^\gamma}{\gamma} \leq 2 \frac{x}{\pi} \sum_{\pi < \gamma \leq \pi_1} 1 \ll \frac{x}{\pi} \varphi(\pi).$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание Анализ доказательства теоремы 5 показывает, что слагаемое $O(\varphi^2(x \pi_1))$ в остаточном члене может быть заменено величиной $O(\varphi(x))$. Для дальнейшего приложения такое уточнение несущественно, однако в ряде случаев все же играет важную роль (см. далее лемму 6, 8 и теоремы 15-18).

По этой причине ниже дается вывод требуемой оценки.

(см. продолжение на стр. 74)

Лекция 4

Наша основная цель сегодня — доказать асимптотическую формулу для функции $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$.
Выше отмечалось, что для этого достаточно найти асимптотику для функции Чебышева $\psi(x)$. В свою очередь, для этого нам требуется теорема о границе нулей дзета-функции Римана.

Теорема 6 (Валле-Пуссен). Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для всякого нуля $\rho = \beta + i\gamma$ выполнено неравенство

$$\beta \leq 1 - \frac{c}{\ln(|\gamma|+2)}.$$

Доказательство. Пусть $\sigma > 1$, $t \geq 2$ — произвольные числа, ~~$\beta \leq 1$~~ . Рассмотрим выражение

$$H = 3 \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) + 4 \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \right) + \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} \right).$$

С одной стороны,

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \right) = \operatorname{Re} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \cos(t \vartheta_n)$$

так что

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} (3 + 4 \cos(t \vartheta_n) + \cos(2t \vartheta_n)) = \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 + \cos(t \vartheta_n))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = - \sum_p \left(\frac{1}{\sigma-p} + \frac{1}{p} \right) - A + \frac{1}{\sigma-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma+2n} - \frac{1}{2n} \right).$$

Пользуясь оценкой последней суммы, найдем —

ной нами ранее, получим:

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)} \right) \leq - \sum_{\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + c_1 \varrho_1(t+2).$$

Поскольку $0 \leq \beta \leq 1 < \sigma$ для любого нуля ρ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma-\beta+i(t-\gamma)} + \frac{1}{\beta+i\gamma} \right) \\ &= \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \geq 0, \text{ так что} \end{aligned}$$

все слагаемые в сумме по нулям неотрицательны. В частности, отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\xi'(\sigma+2it)}{\xi(\sigma+2it)} \right) \leq c_1 \varrho_1(2t+2) \leq c_2 \varrho_1(t+2).$$

Далее, зафиксируем произвольный нуль $\rho = \beta + i\gamma$, $\gamma > 0$, и оставим в правой части неравенства единственное слагаемое, отвечающее этому нулю. Получим:

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)} \right) \leq - \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + c_1 \varrho_1(t+2).$$

Наконец, замечая, что

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)} \right) = - \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma-1} + c_3,$$

получим:

$$\begin{aligned} 0 \leq H &\leq 3 \left(\frac{1}{\sigma-1} + c_3 \right) + 4 \left(- \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \right. \\ &\quad \left. + c_1 \varrho_1(t+2) \right) + c_2 \varrho_1(t+2) \leq \\ &\leq \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + c_0 \varrho_1(t+2), \end{aligned}$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная,

До этого момента величины σ и t были произвольными и удовлетворяли лишь условиям $\sigma > 1$, $t > 0$. Положим теперь $t = \chi$; получим:

$$0 \leq \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + c_0 \varphi_1(\chi+2), \text{ откуда}$$

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + c_0 \varphi_1(\chi+2).$$

Далее, положим $\sigma = 1 + \frac{1}{\alpha \varphi_1(\chi+2)}$, где α — постоянная, точное значение которой будет указано позже. Тогда

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leq (3\alpha + c_0) \varphi_1(\chi+2),$$

$$\sigma - \beta \geq \frac{4}{(3\alpha + c_0) \varphi_1(\chi+2)} \rightarrow \text{так что}$$

$$\beta \leq \sigma - \frac{4}{(3\alpha + c_0) \varphi_1(\chi+2)} =$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{3\alpha + c_0} - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{\varphi_1(\chi+2)} =$$

$$= 1 - \frac{\alpha - c_0}{\alpha(3\alpha + c_0)} - \frac{1}{\varphi_1(\chi+2)}.$$

Положив, наконец, $\alpha = 2c_0$, приходим к искомому утверждению с $c = \frac{1}{14c_0}$. Теорема доказана. $\square$.

Теорема 7 Существует абсолютная постоянная $a > 0$ такая, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливо равенство: $\psi(x) = x + O(xe^{-a\sqrt{\varphi_1 x}})$.

Доказательство. Задавшись некоторым T с условиями $2 \leq T \leq x$, согласно теореме 5 получим:

$$\phi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\gamma}{\gamma} + O\left(\frac{x}{T} e^{-c\sqrt{x}}\right).$$

Если $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль с условием $|\gamma| \leq T$, то в силу теоремы Б имеем:

$$\beta \leq 1 - \frac{c}{\ln T},$$

так что

$$x^\beta \leq x^{1 - \frac{c}{\ln T}} = x \exp\left\{-c \frac{\ln x}{\ln T}\right\},$$

откуда

$$\left| \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\gamma}{\gamma} \right| \leq 2 \sum_{0 < \gamma \leq T} \frac{x^\beta}{\gamma} \leq$$

$$\leq 2x \exp\left\{-c \frac{\ln x}{\ln T}\right\} \sum_{0 < \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma}.$$

Последняя сумма оценивается с помощью свойства 3 и не превосходит

$$\sum_{2 \leq n \leq T} \sum_{n \leq \gamma \leq n+1} \frac{1}{\gamma} \leq \sum_{2 \leq n \leq T} \frac{1}{n} \sum_{n \leq \gamma \leq n+1} 1 \ll$$

$$\ll \sum_{2 \leq n \leq T} \frac{\ln n}{n} \ll \ln^2 T \ll \ln^2 x.$$

Следовательно, полагая $\psi(x) = \phi(x) - x$, получим:

$$|\psi(x)| \ll x (\ln x)^2 \exp\left\{-c \frac{\ln x}{\ln T}\right\} + \frac{x}{T} (\ln x)^2.$$

Полагая теперь $T = e^{\sqrt{c}} \sqrt{\ln x}$, находим:

$$|\psi(x)| \ll x (\ln x)^2 e^{-\sqrt{c} \sqrt{\ln x}} \leq x e^{-a \sqrt{\ln x}},$$

где можно положить, например, постоянную a равной $\frac{1}{2} \sqrt{c}$. $\square$

Теорема 8 (асимптотический закон распределения простых чисел). При $x \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x}}\right),$$

где a — постоянная теоремы $\mathbb{F}$.

Замечание. Интеграл, входящий в формулу для $\pi(x)$, называется интегральным логарифмом и обозначается $Li(x)$. Интегрирование по частям даёт:

$$\begin{aligned} Li(x) &= \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{du}{(\ln u)^2} = \\ &= \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{(\ln u)^2} + O(1). \end{aligned}$$

Немного заметив, что

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{du}{(\ln u)^2} &= \left(\int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \right) \frac{du}{(\ln u)^2} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{x}}{(\ln 2)^2} + \frac{x}{(\ln \sqrt{x})^2} \leq \frac{5x}{(\ln x)^2}, \end{aligned}$$

так что $Li(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right)$.

Поэтому формуле теоремы 8 можно придать следующий (менее точный, но более наглядный) вид:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(u)}{u \ln^2 u} du + O(\sqrt{x}).$$

Заменяя в нем $\psi(u)$ на $u + \tau(u)$, будем

иметь:

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} + R(x) = \\ &= Li(x) + \underline{O}(1) + R(x), \quad \text{где} \\ R(x) &= \frac{\varepsilon(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\varepsilon(u) du}{u \ln^2 u} + \underline{O}(\sqrt{x}) \ll \\ &\ll \frac{x e^{-a\sqrt{\ln x}}}{\ln x} + x e^{-a\sqrt{\ln x}} \int_2^x \frac{du}{u \ln^2 u} + \sqrt{x} \ll \\ &\ll x e^{-a\sqrt{\ln x}}, \quad \text{что и требовалось.} \quad \square\end{aligned}$$

Интересно сравнить последние два утверждения с тем, что следует из гипотезы Римана.

Теорема 9. Если гипотеза Римана верна, то $\psi(x) = x + \underline{O}(\sqrt{x} (\ln x)^2)$,

$$\pi(x) = Li(x) + \underline{O}(\sqrt{x} \ln x).$$

Доказательство. Второе соотношение может быть выведено из первого указанным выше способом, так что достаточно получить асимптотику для $\psi(x)$.

Положим $T=x$ в формуле теоремы 5; получим:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x - \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{x^{\frac{1}{2} + i\gamma}}{\frac{1}{2} + i\gamma} + \underline{O}(\ln^2 x) = \\ &= x - \sqrt{x} \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{x^{i\gamma}}{\frac{1}{2} + i\gamma} + \underline{O}(\ln^2 x).\end{aligned}$$

Сумма по нулям оценивается по порядку величины $\underline{O}(\ln^2 x)$. Теорема доказана.

Лекция 5.

Пусть $x \geq x_0$ — достаточно большое число, $1 < h < x$. Ставится следующая задача: при каком наименьшем $h = h(x)$ можно получить асимптотическую формулу для количества простых чисел на "коротком" промежутке $(x, x+h]$?

Из теоремы 8 следует, что такая формула заведомо имеет место при

$$h \geq x e^{-\sqrt{v \sqrt{x}}},$$

где $v > 0$ — достаточно малая абсолютная постоянная. С другой стороны, из гипотезы Римана следует, что такая асимптотика имеет место уже при

$$h \geq \sqrt{x} (v \sqrt{x})^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

Возникает вопрос: можно ли, не опираясь на гипотезу Римана, получить такую асимптотику при $h \geq x^{1-\delta}$, где $\delta > 0$ — некоторая абсолютная постоянная?

Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным. Для доказательства соответствующей теоремы нам потребуются два вспомогательных утверждения (мы ограничимся лишь их формулировками).

Теорема 10 (И. М. Виноградов) Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для всякого нуля $\rho = \beta + i\gamma$ выполнено неравенство:

$$\beta \leq 1 - \frac{c}{(v|\gamma|)^{\frac{2}{3}} (v|\gamma|)^{\frac{1}{3}}},$$

Теорема 11 Пусть $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, $T \geq 2$, и пусть $N(\sigma, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Тогда существуют абсолютные постоянные $a \geq 2$ и $b \geq 1$ такие, что выполняется оценка:

$$N(\sigma, T) \ll T^a (1-\sigma)^b (a, T)^b.$$

Замечание Верхние оценки величины $N(\sigma, T)$ принято называть плотностными теоремами. Ограничение $a \geq 2$ возникает от того, что при $\sigma = \frac{1}{2}$ должны выполняться неравенства

$$T^{\frac{a}{2}} (a, T)^b \gg N\left(\frac{1}{2}, T\right) \geq \frac{1}{2} N(T) \gg T^a.$$

Значение постоянной a в плотностной теореме 11 уточнялось целым рядом авторов: $a = 4$ (Ф. Карсон, 1921; Г. Гегейзель, 1930); $a = \frac{77}{29} \approx 2.655 \dots$ (А. Ингам, 1937); $a = \frac{5}{2}$ (Х. Монтгомери, 1970); $a = \frac{12}{5} = 2.4$ (М. Хакелл, 1972). Утверждение теоремы 11 с $a = 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число, называется плотностной гипотезой.

Имеет место

Теорема 12. Пусть a — постоянная теоремы 11, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ и $x^{1-\frac{1}{a}+\varepsilon} \leq h \leq x$ имеет место асимптотическая формула:

$$\pi(x+h) - \pi(x) = \frac{h}{a x} \left(1 + O\left(e^{-(a x)^{\frac{1}{a}}} \right) \right).$$

Доказательство. Достаточно получить соответствующую асимптотику для разности $\varphi(x+h) - \varphi(x)$; переход к $\pi(x+h) - \pi(x)$ осуществляется с помощью преобразования Абеля.

Задавшемуся некоторым T , $2 \leq T \leq x$, в силу теоремы 5 будем иметь:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(x+h)^\beta - x^\beta}{\beta} + O\left(\frac{x}{T} e^{-2\pi x}\right),$$

Обозначим сумму по γ через $W(x; T)$.

Тогда

$$\begin{aligned} W(x; T) &= \sum_{|\gamma| \leq T} \int_0^h (x+u)^\beta du = \\ &= \int_0^h \frac{1}{x+u} \sum_{|\gamma| \leq T} (x+u)^\beta du, \text{ откуда} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |W(x; T)| &\leq \frac{1}{x} \int_0^h \sum_{|\gamma| \leq T} (x+u)^\beta du = \\ &= \frac{2}{x} \int_0^h \sum_{0 < \gamma \leq T} (x+u)^\beta du, \end{aligned}$$

Пусть u_1 — то значение u , $0 \leq u \leq h$, при котором последнее подынтегральное выражение максимально. Находим:

$$|W(x; T)| \leq \frac{2h}{x} V(X; T),$$

где обозначено:

$$V(X; T) = \sum_{0 < \gamma \leq T} X^\beta, \quad X = x + u_1.$$

Для оценки суммы $V(X; T)$ применим плотностную теорему. В свою очередь, для этого необходимо преобразовать слагаемые следующим образом. Прежде всего,

$$\int_{1/2}^{\beta} X^u du = \frac{X^{\beta} - \sqrt{X}}{eX}, \quad \text{откуда}$$

$$X^{\beta} = \sqrt{X} + (eX) \int_{1/2}^{\beta} X^u du,$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V(X; T) &= \sum_{0 < \gamma \leq T} \left(\sqrt{X} + (eX) \int_{1/2}^{\beta} X^u du \right) = \\ &= \sqrt{X} N(T) + (eX) \sum_{0 < \gamma \leq T} \int_{1/2}^{\beta} X^u du. \end{aligned}$$

Определим функцию $g(u; \rho) \equiv g(u; \beta + i\gamma)$ равняющуюся

$$g(u; \rho) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{2} \leq u \leq \beta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{1/2}^{\beta} X^u du = \int_{1/2}^1 X^u g(u; \rho) du, \quad \text{так что}$$

$$V(X; T) = \sqrt{X} N(T) + (eX) \int_{1/2}^1 X^u \sum_{0 < \gamma \leq T} g(u; \rho) du.$$

Однако

$$\sum_{0 < \gamma \leq T} g(u; \rho) = \sum_{\substack{0 < \gamma \leq T \\ \beta \geq u}} 1 = N(u; T),$$

и окончательное выражение для $V(X; T)$ имеет вид

$$V(X; T) = \sqrt{X} N(T) + (eX) \int_{1/2}^1 X^u N(u; T) du.$$

Применяя теорему 11 и замечая, что

$$N(u; T) \equiv 0 \quad \text{при } 1 - \Delta \leq u \leq 1,$$

где $\Delta = c(eT)^{-\frac{2}{3}}(eXeT)^{-\frac{1}{3}}$, получим:

$$\begin{aligned} V(X; T) &\leq \sqrt{X} T(eX) + (eX) \int_{1/2}^{1-\Delta} X^u T^a (1-u)^a (eT)^b du \\ &\leq (eX)^{b+1} \left\{ \sqrt{X} T + T^a \int_{1/2}^{1-\Delta} \left(\frac{X}{T^a} \right)^u du \right\}, \end{aligned}$$

Последний интеграл при любых X, T не превосходит суммы значений подынтегральной функции в точках $u = \frac{1}{2}$ и $u = 1 - \Delta$, умноженной на длину отрезка интегрирования. Таким образом,

$$\begin{aligned} V(X; T) &\leq (eX)^{\beta+1} \left\{ \sqrt{X} T + \pi a \left(\left(\frac{X}{\pi a} \right)^{1-\Delta} + \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \\ &\leq (eX)^{\beta+1} \left\{ \sqrt{X} T + X \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{-\Delta} + \sqrt{X} T^{\frac{a}{2}} \right\} \leq \\ &\leq (eX)^{\beta+1} \left\{ X \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{-\Delta} + \sqrt{X} T^{\frac{a}{2}} \right\} \leq \\ &\leq X (eX)^{\beta+1} \left\{ \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{-\Delta} + \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Предполагая далее, что $\pi a < X$ и замечая, что $0 < \Delta < \frac{1}{2}$, при достаточно большом T , получим:

$$V(X; T) \leq X (eX)^{\beta+1} \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{-\Delta}.$$

Положим теперь

$$\pi a = x \vartheta^{-1}, \quad \text{где } \vartheta = e^{(eX)^{\frac{4}{5}}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{X}{\pi a} \right)^{-\Delta} &\leq \vartheta^{-\Delta} \leq \exp \left\{ - \frac{c(eX)^{\frac{4}{5}}}{(eT)^{\frac{2}{3}} (e e T)^{\frac{1}{3}}} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -c_1 \frac{(eX)^{\frac{4}{5}}}{(eX)^{\frac{2}{3}} (e e X)^{\frac{1}{3}}} \right\} \leq e^{-(eX)^{\frac{1}{8}}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V(X; T) &\leq x (eX)^{\beta+1} e^{-(eX)^{\frac{1}{8}}} \\ W(X; T) &\leq h (eX)^{\beta+1} e^{-(eX)^{\frac{1}{8}}} \leq h e^{-(eX)^{\frac{1}{10}}}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \psi(x+h) - \psi(x) &= h - O\left(h e^{-(eX)^{\frac{1}{10}}}\right) - O\left(x^{1-\frac{1}{a}} \vartheta^{\frac{1}{a}} e^2 x\right) \\ &= h \left\{ 1 + O\left(e^{-(eX)^{\frac{1}{10}}}\right) + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{a}} \vartheta^{\frac{1}{a}} e^2 x}{h}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Если $h \geq x^{1-\frac{1}{a}+\varepsilon}$, то последнее слагаемое по порядку не превосходит

$$x^{-\varepsilon} (O(x))^2 e^{\frac{1}{a} (O(x))^{\frac{4}{5}}} \leq x^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \leq e^{-(O(x))^{\frac{1}{10}}},$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Для значения $a = \frac{12}{5}$ из плотностной теоремы Хаксли следует:

$$1 - \frac{1}{a} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}.$$

Существование хотя бы одного простого числа на промежутке $(x; x+h]$ можно гарантировать и при меньших h , именно при

$$h \geq x^{\frac{21}{40} + \varepsilon} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{40} + \varepsilon}.$$

Этот результат принадлежит Р. Вейксеру, Г. Харману и Я. Пиктусу (2001).

Лекция 6.

Бинарная проблема Эйлера - Гольдбаха состоит в доказательстве того, что всякое четное число $N \geq 6$ есть сумма двух нечетных простых чисел. В настоящее время она остается открытой. Поэтому большой интерес представляет следующая задача: с какой точностью можно приблизить заданное натуральное число N суммой двух простых чисел? Цель настоящей лекции - доказать следующее утверждение.

Теорема 13. Пусть a - постоянная теоремы 11, ε - сколь угодно малое фиксированное число, $N \geq N_0(a; \varepsilon)$. Тогда неравенство

$$|N - p_1 - p_2| \leq H \quad (1)$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 при любом H с условиями

$$N^{1 - \frac{2}{a} + \varepsilon} \leq H \leq \frac{1}{10} N.$$

Замечание. Для значения $a = \frac{12}{5}$ имеем следующую нижнюю границу для H :

$$H \geq N^{\frac{1}{6} + \varepsilon}.$$

Нам потребуется вспомогательная

Лемма 5. Пусть $a < b$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции f справедливо неравенство:

$$|f(b)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(u)| du + \int_a^b |f'(u)| du.$$

Доказательство. Для произвольного v , $a \leq v \leq b$,

имеем:
$$f(b) - f(v) = \int_v^b f'(u) du.$$

Интегрируя ~~по~~ обе части этого неравенства по v ,
 $a \leq v \leq b$, получим:

$$\begin{aligned}(b-a)f(b) &= \int_a^b f(v) dv + \int_a^b \int_v^b f'(u) du dv = \\&= \int_a^b f(v) dv + \int_a^b f'(u) \int_a^u dv du = \\&= \int_a^b f(v) dv + \int_a^b (u-a)f'(u) du.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du + \int_a^b \frac{u-a}{b-a} f'(u) du.$$

Отсюда легко получить искомое утверждение. $\square$

Следствие. Пусть $R \geq 2$ - целое число, $t_0 < t_1 < \dots < t_R$, причем $\min_{0 \leq r < R} (t_{r+1} - t_r) \geq \delta > 0$.

Тогда для любой функции f , непрерывно дифференцируемой на отрезке $[t_0, t_R]$, справедливо неравенство:

$$\sum_{r=1}^R |f(t_r)| \leq \frac{1}{\delta} \int_{t_0}^{t_R} |f(u)| du + \int_{t_0}^{t_R} |f'(u)| du.$$

Доказательство. Согласно лемме 5, при любых r , $1 \leq r \leq R$, имеем:

$$|f(t_r)| \leq \frac{1}{t_r - t_{r-1}} \int_{t_{r-1}}^{t_r} |f(u)| du + \int_{t_{r-1}}^{t_r} |f'(u)| du.$$

Замечая, что $\frac{1}{t_r - t_{r-1}} \leq \frac{1}{\delta}$ и суммируя

по r , приходим к искомому неравенству.

Доказательство теоремы 13. Обозначим

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

и заметим, что если для простого p $\frac{N}{2} \leq p \leq N$, выполнено неравенство

$$\mathcal{J}(N-p+N) - \mathcal{J}(N-p) > 0, \quad (2)$$

то между $N-p$ и $N-p+N$ имеется хотя бы одно простое число q : $N-p < q \leq N-p+N$.

Для него, следовательно, имеем:

$$N < p+q \leq N+N, \quad \text{или}$$

$$0 < p+q-N \leq N.$$

Далее, поскольку все разности (2) неотрицательны, из неравенства

$$N = \sum_{\frac{N}{2} \leq p \leq N} (\mathcal{J}(N-p+N) - \mathcal{J}(N-p)) > 0$$

будет следовать разрешимость (1).

Чтобы заменить разность (2) на величину $\mathcal{J}(N-p+N) - \mathcal{J}(N-p)$, заметим, что

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p^2 \leq x} \ln p + \dots + \sum_{p^k \leq x} \ln p + \dots$$

$$= \mathcal{J}(x) + \mathcal{J}(\sqrt{x}) + \dots + \mathcal{J}(x^{\frac{1}{k}}) + \dots$$

(сумма, очевидно, конечна и содержит не более $\log_2 x$ слагаемых). Далее, очевидно,

что при $h \leq x$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}((x+h)^{\frac{1}{k}}) - \mathcal{J}(x^{\frac{1}{k}}) &= \sum_{x^{\frac{1}{k}} < p \leq (x+h)^{\frac{1}{k}}} \ln p \leq \\ &\leq \ln (x+h)^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ (x+h)^{\frac{1}{k}} - x^{\frac{1}{k}} \right\} \leq \frac{\ln(2x)}{k} \left\{ \frac{1}{k} h x^{-1+\frac{1}{k}} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{откуда } \sum_{k \geq 2} \left\{ \delta((x+h)^{\frac{1}{k}}) - \delta(x^{\frac{1}{k}}) \right\} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{x}} \varrho x + (\varrho x) \varrho \varrho x. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\delta(x+h) - \delta(x) = \psi(x+h) - \psi(x) + \\ + \underline{O}\left((\varrho x) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \varrho \varrho x\right)\right).$$

$$\text{Поэтому} \\ W = \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \left\{ \psi(N-p+H) - \psi(N-p) + \right. \\ \left. + \underline{O}\left((\varrho N) \left(\frac{H}{\sqrt{N}} + \varrho \varrho N\right)\right) \right\} = \\ = \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \left\{ \psi(N-p+H) - \psi(N-p) \right\} + \\ + \underline{O}\left(N \left(\frac{H}{\sqrt{N}} + \varrho \varrho N\right)\right).$$

Задавшись некоторыми π , $2 \leq \pi \leq N$, и вновь применив теорему 5. Получим:

$$W = \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \left\{ H - \sum_{|\alpha| \leq \pi} \frac{(N-p+H)^{\rho} - (N-p)^{\rho}}{\rho} + \right. \\ \left. + \underline{O}\left(\frac{N}{\pi} (\varrho N)^2\right) \right\} + \underline{O}\left(N \left(\frac{H}{\sqrt{N}} + \varrho \varrho N\right)\right) =$$

$$= H \pi \left(\frac{N}{2}\right) - W_1 + \underline{O}(R_1), \quad \text{где}$$

$$W_1 = \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \sum_{|\alpha| \leq \pi} \frac{(N-p+H)^{\rho} - (N-p)^{\rho}}{\rho} =$$

$$= \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \sum_{|\alpha| \leq \pi} \int_0^H (N-p+u)^{\rho-1} du =$$

$$= \int_0^H \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \frac{1}{N-p+u} \sum_{|\alpha| \leq \pi} (N-p+u)^{\rho} du \rightarrow$$

$$R_1 \ll N \left(\frac{H}{\sqrt{N}} + \varrho \varrho N\right) + \frac{N^2}{\pi} \varrho N \ll$$

$$\leq H\pi\left(\frac{N}{2}\right) \left\{ \frac{e_N N}{\sqrt{N}} + \frac{(e_N N) e_N e_N N}{H} + \frac{N}{H\pi} e_N N \right\}.$$

Переходя к осям, будем иметь:

$$|W_1| \leq \int_0^H \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \frac{1}{N} \left| \sum_{|\gamma| \leq \pi} (N-p+u)^\rho \right| du \\ \leq \frac{H}{N} W_2, \quad \text{где } W_2 = \sum_{3 \leq p \leq \frac{N}{2}} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi} (N-p+u_1)^\rho \right|,$$

где u_1 — то значение u , $0 \leq u \leq H$, при котором подынтегральная функция достигает максимума. Применяя к W_2 следствие леммы 5 и беря в качестве $t_\pm$ точки вида $N-p+u_1$, $3 \leq p \leq \frac{N}{2}$, получим: $W_2 \leq \frac{1}{2} \int_1 + \int_2$, где

$$j_1 = \int_{\frac{N}{2}+u_1}^{N+u_1} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi} u^\rho \right| du,$$

$$j_2 = \int_{\frac{N}{2}+u_1}^{N+u_1} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi} \rho u^{\rho-1} \right| du.$$

В силу неравенства Коши,

$$j_1^2 \leq \frac{N}{2} \int_{\frac{N}{2}+u_1}^{N+u_1} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi} u^\rho \right|^2 du \leq$$

$$\leq \frac{N}{2} \int_{\frac{N}{2}}^{2N} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi} u^\rho \right|^2 du =$$

$$= \frac{N}{2} \int_{\frac{N}{2}}^{2N} \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq \pi} u^{\beta_1 + \beta_2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} du =$$

$$= \frac{N}{2} \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq \pi} \frac{u^{\beta_1 + \beta_2 + 1 + i(\gamma_1 - \gamma_2)}}{\beta_1 + \beta_2 + 1 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} \Big|_{\frac{N}{2}}^{2N} \leq$$

$$\leq N \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq \pi} \frac{N^{\beta_1 + \beta_2 + 1}}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|},$$

Разовьем последнюю сумму на две части, отве-

таким же, соответственно, $\beta_2 \leq \beta_1$ и $\beta_1 < \beta_2$.

Получим:

$$j_1^2 \leq N^2 \sum_{\substack{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T \\ \beta_2 \leq \beta_1}} \frac{N^{2\beta_1}}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} + \\ + N^2 \sum_{\substack{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T \\ \beta_1 < \beta_2}} \frac{N^{2\beta_2}}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \ll \\ \ll N^2 \sum_{0 < \gamma \leq T} N^{2\beta} \sum_{0 < \gamma' \leq T} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|}$$

Внутренняя сумма не превосходит по порядку

$$\sum_{0 \leq h \leq T} \sum_{h \leq |\gamma - \gamma'| \leq h+1} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|} \leq \sum_{0 \leq h \leq T} \frac{1}{h+1} \times \\ \times \left\{ \sum_{\gamma+h \leq \gamma' \leq \gamma+h+1} 1 + \sum_{\gamma-h-1 \leq \gamma' \leq \gamma-h} 1 \right\} \ll \\ \ll \sum_{0 \leq h \leq T} \frac{O(|\gamma| + h + 1)}{h+1} \ll (eT)^2 \ll (eN)^2.$$

Значит, $j_1^2 \ll N^2 (eN)^2 \sum_{0 < \gamma \leq T} N^{2\beta}$.

Оценка последней суммы (с X^β вместо $N^{2\beta}$) была найдена на предыдущей лекции:

$$\sum_{0 < \gamma \leq T} N^{2\beta} \ll N^2 (eN)^{\beta+1} \left\{ \left(\frac{N^2}{\pi a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{N^2}{\pi a} \right)^{-\Delta} \right\},$$

где $\Delta = c(eT)^{-\frac{2}{3}} (e e T)^{-1/3}$. Предполагая далее, что $\pi a < N^2$ и замечая, что $0 < \Delta < \frac{1}{2}$,

получим:

$$j_1^2 \ll N^2 (eN)^2 \cdot N^2 (eN)^{\beta+1} \left(\frac{N^2}{\pi a} \right)^{-\Delta} \ll \\ \ll N^4 (eN)^{\beta+3} \left(\frac{N^2}{\pi a} \right)^{-\Delta}, \\ j_1 \ll N^2 (eN)^{\frac{\beta+3}{2}} \left(\frac{N^2}{\pi a} \right)^{-\frac{\Delta}{2}}.$$

Подобным образом оценивается и интеграл J_2 :

$$J_2 = \int_{\frac{N}{2} + u_1}^{N + u_1} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} g u^\beta \right| \frac{du}{u} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} \int_{\frac{N}{2}}^{2N} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} g u^\beta \right| du,$$

$$J_2^2 \ll \frac{1}{N} \int_{\frac{N}{2}}^{2N} \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} g_1 \bar{g}_2 u^{\beta_1 + \beta_2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} du \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} |g_1| \cdot |g_2| \cdot \frac{N^{\beta_1 + \beta_2 + 1}}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \ll$$

$$\ll \frac{T^2}{N} \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} \frac{N^{\beta_1 + \beta_2 + 1}}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \ll$$

$$\ll T^2 \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} \frac{N^{\beta_1 + \beta_2}}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \ll$$

$$\ll T^2 (eN)^2 \sum_{0 < \gamma \leq T} N^{2\beta} \ll (NT)^2 (eN)^{\frac{\sigma+3}{2}} \left(\frac{N^2}{Ta} \right)^{-\frac{\Delta}{2}},$$

так что $J_2 \ll NT (eN)^{\frac{\sigma+3}{2}} \left(\frac{N^2}{Ta} \right)^{-\frac{\Delta}{2}}$. Поскольку

$T \leq N$, окончательно получим:

$$W_2 \ll N^2 (eN)^{\frac{\sigma+3}{2}} \left(\frac{N^2}{Ta} \right)^{-\frac{\Delta}{2}},$$

$$W_1 \ll \frac{H}{N} W_2 \ll HN (eN)^{\frac{\sigma+3}{2}} \left(\frac{N^2}{Ta} \right)^{-\frac{\Delta}{2}}.$$

Следовательно,

$$W = H \pi \left(\frac{N}{2} \right) - W_1 + O(R_1) \geq H \pi \left(\frac{N}{2} \right) (1 - O(R)),$$

$$R \ll (eN)^{\frac{\sigma+5}{2}} \left(\frac{N^2}{Ta} \right)^{-\frac{\Delta}{2}} + \frac{eN}{\sqrt{N}} + \frac{(eN)eN}{H} + \frac{N}{HT} eN.$$

Беря $T = N^{\frac{2}{a} - \frac{1}{a}}$, где a — постоянная теоремы 11,

$\Delta = e(eN)^{4/5}$, при $H \geq N^{1 - \frac{2}{a} + \varepsilon}$, получим:

$$R \ll e^{-(eN)^{\frac{1}{8}}} + N^{-\frac{\varepsilon}{2}} \ll e^{-(eN)^{\frac{1}{8}}}, \quad \square$$

Лекция 7,

Результат теоремы 13 можно значительно уточнить, заменив величину $H = N^{1-\frac{2}{a}+\varepsilon}$ на $h = N^{c+\varepsilon}$, где $c = (1-\frac{1}{a})(1-\frac{2}{a})$. В частности, при $a = \frac{12}{5}$ получим $c = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{72}$. Доказательство этого утверждения, принадлежащего Х. Монгомери и Р. Воку, составляет предмет сегодняшней лекции.

Теорема 14. Пусть a — постоянная теоремы 11, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число, $N \geq N_0(\varepsilon)$, $N^{c+\varepsilon} \leq h \leq \frac{1}{10} N$, где $c = (1-\frac{1}{a})(1-\frac{2}{a})$. Тогда неравенство

$$|N - p - q| \leq h \quad (1)$$

разрешимо в простых числах p, q .

Поясним сначала идею доказательства. Ставим приближать число N "жадным" способом: сперва отыщем простое $p < N$, максимально близкое к N , а затем отыщем простое q , максимально близкое к $N_1 = N - p$. Ограничиваясь лишь теоремой 12, можно гарантировать выполнение неравенств

$$N_1 \ll N^{1-\frac{1}{a}+\varepsilon}, \quad N_2 = N_1 - q \ll N_1^{1-\frac{1}{a}+\varepsilon} \ll N^{(1-\frac{1}{a})^2+\varepsilon}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon),$$

что отвечает разрешимости (1) при

$h \geq N^{c_1 + \varepsilon}$, $c_1 = (1 - \frac{1}{\alpha})^2 > c$. Однако выбор простых p и q можно осуществить иначе: в силу теоремы 12, на расстоянии порядка $N^{1 - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$ от числа N имеется достаточно много простых чисел p и, как будет показано ниже, почти все они таковы, что вблизи $N - p$ на расстоянии порядка $(N - p)^{1 - \frac{2}{\alpha} + \varepsilon} \asymp N^{c + \varepsilon}$ есть хотя бы одно простое число q .

Доказательство теоремы 14. Положим

$Y = N^{1 - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$. В силу теоремы 12, на промежутке $(N - 2Y, N - Y]$ имеется

$$\frac{Y}{e_1(N - 2Y)} \left(1 + O(e^{-(eN)^{\frac{1}{10}}}) \right) \geq \frac{Y}{2e_1 N}$$

простых чисел p . Рассмотрим теперь сумму

$$W = \sum_{N - 2Y < p \leq N - Y} \left(\mathcal{J}(N - p + h) - \mathcal{J}(N - p) - h \right)^2.$$

Ввиду того, что ~~$N \neq p$~~ $Y \leq N - p \leq 2Y$, подобно тому, как это делалось на прошлой лекции, несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(N - p + h) - \mathcal{J}(N - p) &= \\ &= \psi(N - p + h) - \psi(N - p) + O(eN) \left(\frac{h}{\sqrt{Y}} + e_1 eN \right) \end{aligned}$$

Значит,

$$W \leq 2 \sum_{N - 2Y < p \leq N - Y} \left\{ \psi(N - p + h) - \psi(N - p) - h \right\}^2 +$$

$$+ O\left(\frac{\gamma}{eN} \cdot (eN)^2 \left(\frac{h^2}{\gamma} + (eN)^2\right)\right) =$$

$$= 2W_1 + O\left(\gamma h^2 \left(\frac{eN}{\gamma} + \frac{(eN)(eN)^2}{h^2}\right)\right),$$

где символ обозначения W_1 есть. Далее, задавшись некоторым T условием $2 \leq T \leq \gamma$, получим:

$$W_1 = \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left\{ \sum_{|x| \leq T} \frac{(N-p+h)^p - (N-p)^p}{p} + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{\gamma}{T} (eN)^2\right) \right\}^2 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left\{ \sum_{|x| \leq T} \frac{(N-p+h)^p - (N-p)^p}{p} \right\}^2 +$$

$$+ O\left(\frac{\gamma^3}{T^2} (eN)^3\right) \leq 8W_2 + O\left(\frac{\gamma^3}{T^2} (eN)^3\right),$$

$$\text{где } W_2 = \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left| \sum_{0 < x \leq T} \frac{(N-p+h)^p - (N-p)^p}{p} \right|^2$$

$$= \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left| \int_0^h \sum_{0 < x \leq T} (N-p+u)^{p-1} du \right|^2 =$$

$$= \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left| \int_0^h \frac{1}{N-p+u} \sum_{0 < x \leq T} (N-p+u)^p du \right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma^2} \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left| \int_0^h \sum_{0 < x \leq T} (N-p+u)^p du \right|^2.$$

В силу неравенства Коши,

$$W_2 \leq \frac{h}{\gamma^2} \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \int_0^h \left| \sum_{0 < x \leq T} (N-p+u)^p \right|^2 du$$

$$\leq \frac{h^2}{\gamma^2} \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} \left| \sum_{0 < x \leq T} (N-p+u_1)^p \right|^2, \text{ где}$$

u_1 — это значение u , $0 \leq u \leq h$, при котором подынтегральная функция максимальна.

Далее, точки $N-p+1$, расположенные на промежутке $(Y, 2Y+h]$, и отстоят друг от друга на расстояние ≥ 2 . Поэтому, применяя следствие леммы 5 к функции

$$f(u) = \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} u^\gamma \right|^2,$$

получим:

$$W_2 \leq \frac{h^2}{Y^2} \left(\frac{1}{2} J_1 + J \right), \quad \text{где}$$

$$J_1 = \int_Y^{2Y+h} |f(u)| du \leq \int_Y^{3Y} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} u^\gamma \right|^2 du,$$

$$J = \int_Y^{2Y+h} |f'(u)| du.$$

Замечая, что

$$f(u) = |S(u)|^2 = S(u) \bar{S}(u),$$

$$\text{где} \quad S(u) = \sum_{0 < \gamma \leq T} u^\gamma,$$

получим:

$$f'(u) = S'(u) \bar{S}(u) + S(u) \bar{S}'(u),$$

откуда

$$|f'(u)| \leq 2 |S(u)| \cdot |S'(u)|,$$

и, следовательно,

$$J \leq 2 \int_Y^{2Y+h} |S(u)| \cdot |S'(u)| du \leq 2 \sqrt{J_1} \sqrt{J_2},$$

$$\text{где} \quad J_2 = \int_Y^{2Y+h} |S'(u)|^2 du \leq \int_Y^{3Y} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} \gamma u^{\gamma-1} \right|^2 du$$

Но интегралы J_1 и J_2 оцениваем, по сути, при доказательстве теоремы 13. Для них имеем:

$$J_1, J_2 \ll \gamma^3 (eN)^{b+3} \left(\frac{\gamma^2}{\gamma a} \right)^{-\Delta}$$

при условии, что $\gamma a < \gamma^2$ (здесь $\Delta = \frac{2}{a} \mathfrak{D}^{-\frac{1}{a}}$, $= c(e\gamma)^{-\frac{2}{3}} (eae\gamma)^{-\frac{1}{3}}$). Полагая $\gamma = \gamma^{\frac{2}{a}} \mathfrak{D}^{-\frac{1}{a}}$, где $\mathfrak{D} = e(eN)^{4/5}$, находим:

$$W_2 \ll \frac{h^2}{\gamma^2} \cdot \gamma^3 (eN)^{b+3} \mathfrak{D}^{-\Delta} \ll \gamma h^2 (eN)^{b+3} \mathfrak{D}^{-\Delta},$$

$$W_1 \ll \gamma h^2 \mathfrak{D}^{-\Delta} + \frac{\gamma^3}{\gamma^2} (eN)^3 \ll$$

$$\ll \gamma h^2 \left(\mathfrak{D}^{-\Delta} + \left(\frac{\gamma}{h\gamma} \right)^2 \right) (eN)^{b+3},$$

и, наконец,

$$W \ll \gamma h^2 \left\{ \left(\mathfrak{D}^{-\Delta} + \left(\frac{\gamma}{h\gamma} \right)^2 \right) (eN)^{b+3} + \frac{eN}{\gamma} + \frac{(eN)(eaeN)^2}{h^2} \right\} \ll$$

$$\ll \gamma h^2 \left\{ \left(\mathfrak{D}^{-\Delta} + \gamma^{-\varepsilon} \right) (eN)^{b+3} \right\} \ll \gamma h^2 e^{-(eN)^{\frac{1}{10}}}.$$

Если теперь предположить, что ни один из промежутков $(N-p, N-p+h]$ при простом p , $N-2\gamma < p \leq N-\gamma$, не содержит простых чисел, то для суммы W будет справедлива следующая нижняя оценка:

$$W \geq \sum_{N-2\gamma < p \leq N-\gamma} h^2 \geq h^2 \frac{\gamma}{2eN}, \text{ откуда}$$

$$\frac{h^2 \gamma}{eN} \ll \gamma h^2 e^{-(eN)^{\frac{1}{10}}}.$$

Но последнее неравенство невозможно при достаточно большом N . Поэтому найдется хотя бы одно простое p с условием $N - 2Y < p \leq N - Y$, для которого промежуток $(N - p, N - p + h]$ содержит простое число q . Теорема доказана. $\square$

Приложение 1 (лекция 8)

Нижне мы докажем два условных, (т.е. опирающихся на гипотезу Римана) утверждения о простых числах.

Теорема 15 (А. Сельберг, 1943). Пусть гипотеза Римана верна, и пусть $\Phi(X)$ — произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $X \rightarrow +\infty$ функция.

Тогда для всех x , $X < x \leq 2X$, за исключением $O\left(\frac{X}{\sqrt[3]{\Phi(X)}}\right)$ значений, промежутки $(x, x+h]$; $h = \Phi(X)(\log X)^2$, содержат

$$\frac{h}{\log X} (1 + o(1))$$

простых чисел.

Замечание. Иногда это утверждение формулируют следующим образом: для "почти всех" x промежутки $(x, x+h]$, $h = (\log x)^{2+\varepsilon}$, содержат простое число.

Теорема 16 (Х. Монгомери, Р. Вон, 1979).

Пусть гипотеза Римана верна. Тогда существует абсолютная постоянная $c \geq 1$ такая, что для всех достаточно больших N и $h = c(\log N)^2$ неравенство

$$|N - p - q| \leq h$$

разрешимо в простых числах p и q .

Доказательства обеих теорем опираются на следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть гипотеза Римана верна.

Тогда существуют абсолютные постоянные c_0, c_1 такие, что при достаточно большом X и произвольном h с условием $c_0 \leq h \leq \frac{1}{2} \sqrt{X}$ имеет место оценка:

$$\int_X^{2X} (\mathcal{J}(x+h) - \mathcal{J}(x) - h)^2 dx \leq c_1 X h (eX)^2.$$

Доказательство. Обозначим исходный интеграл через $I_1 = I_1(X; h)$ и оценим ошибку от замены $\mathcal{J}(x+h) - \mathcal{J}(x)$ на $\psi(x+h) - \psi(x)$. Имеем:

$$\psi(x+h) - \psi(x) - h = \mathcal{J}(x+h) - \mathcal{J}(x) - h + g(x; h),$$

где

$$g(x; h) = \sum_{2 \leq k \leq \tau} \left\{ \mathcal{J}\left((x+h)^{\frac{1}{k}}\right) - \mathcal{J}\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \right\},$$

$$\tau = [\log_2(2X+h)] + 1.$$

Значит, $I_1 \leq 2(I_2 + I_3)$, где

$$I_2 = \int_X^{2X} (\psi(x+h) - \psi(x) - h)^2 dx,$$

$$I_3 = \int_X^{2X} g^2(x; h) dx$$

В силу неравенства Коши,

$$I_3 \leq \log_2(3X) \sum_{2 \leq k \leq \tau} \int_X^{2X} \left\{ \mathcal{J}\left((x+h)^{\frac{1}{k}}\right) - \mathcal{J}\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \right\}^2 dx$$

Ввиду условия $h \leq \frac{\sqrt{X}}{2}$ несложно заметить, что между $x^{\frac{1}{k}}$ и $(x+h)^{\frac{1}{k}}$ имеется не более одного целого числа. Действительно,

$$(x+h)^{\frac{1}{k}} - x^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \frac{h}{x^{1-\frac{1}{k}}} \leq \frac{h}{k\sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{X}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi((x+h)^{1/k}) - \varphi(x^{1/k}) &\leq \frac{1}{k} e_1(2X+h) \sum_{x^{1/k} < p \leq (x+h)^{1/k}} 1 \leq \\ &\leq \frac{1}{k} e_1(3X) \sum_{x^{1/k} < p \leq (x+h)^{1/k}} 1, \end{aligned}$$

где сумма ^{по} p равна нулю или единице. Но тогда

$$\int_X^{2X} \left\{ \varphi((x+h)^{1/k}) - \varphi(x^{1/k}) \right\}^2 dx \leq \frac{1}{k^2} e_1^2(3X) \cdot$$

$$\int_X^{2X} \sum_{x^{1/k} < p \leq (x+h)^{1/k}} 1 dx \leq \frac{1}{k^2} e_1^2(3X) \cdot$$

$$\sum_{x^{1/k} < p \leq (2X+h)^{1/k}} \int_{\max(X, p^k-h)}^{\min(2X, p^k)} 1 dx \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{k^2} e_1^2(3X) h \sum_{x^{1/k} < p \leq (2X+h)^{1/k}} 1 \leq \frac{h}{k^2} e_1^2(3X) \cdot \frac{(3X)^{1/k}}{\frac{1}{k} e_1(3X)} \\ &= \frac{h}{k} (3X)^{1/k} e_1(3X). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_3 \leq h e_1^2(3X) \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon} \frac{1}{k} (3X)^{1/k} < h \sqrt{X} e^2 X.$$

Далее, задавшись некоторым Γ , $2 \leq \Gamma \leq X^2$,

будем иметь

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_X^{2X} \left\{ \sum_{|x| \leq \Gamma} \frac{(x+h)^\beta - x^\beta}{\beta} + O\left(\frac{x}{\Gamma} e^2 X\right) + \right. \\ &\quad \left. + O(eX) \right\}^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_X^{2X} \left\{ \sum_{|x| \leq \Gamma} \frac{(x+h)^\beta - x^\beta}{\beta} \right\}^2 dx + O\left(\frac{x^3}{\Gamma^2} e^4 X\right) \\ &\quad + O(x e^2 X) \leq 8 I_4 + O\left(\frac{x^3}{\Gamma^2} e^4 X\right) + O(x e^2 X), \end{aligned}$$

$$\text{где } I_4 = \int_X^{2X} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} \frac{(x+h)^\beta - x^\beta}{\beta} \right|^2 dx.$$

В отличие от всех вышеприведенных выкладок, далее дробь $\frac{(x+h)^\beta - x^\beta}{\beta}$ мы заменим интегралом $\int_0^h (x+u)^{\beta-1} du$ лишь для не очень больших ординат γ . С этой целью введем еще один параметр — T_1 , такой, что $2 \leq T_1 < \frac{1}{100} T$, и разобьем сумму по γ на две: $0 < \gamma \leq T_1$ и $T_1 < \gamma \leq T$. Соответственно, получим:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_X^{2X} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} \int_0^h (x+u)^{\beta-1} du + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{(x+h)^\beta}{\beta} - \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{x^\beta}{\beta} \right|^2 dx \leq \\ &\leq 3 \int_X^{2X} \left| \int_0^h \sum_{0 < \gamma \leq T_1} (x+u)^{\beta-1} du \right|^2 dx + \\ &\quad + 3 \int_X^{2X} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{(x+h)^\beta}{\beta} \right|^2 dx + 3 \int_X^{2X} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{x^\beta}{\beta} \right|^2 dx \\ &\leq 3h \int_X^{2X} \int_0^h \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} (x+u)^{\beta-1} \right|^2 du dx + \\ &\quad + 6 \int_X^{2X+h} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{x^\beta}{\beta} \right|^2 dx \leq \\ &\leq 3h^2 \int_X^{2X+h} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} x^{\beta-1} \right|^2 dx + \\ &\quad + 6 \int_X^{2X+h} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{x^\beta}{\beta} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Замечая, что $2X+h \leq eX$ и пользуясь тем, что все нули ρ имеют вид $\frac{1}{2} + i\gamma$, нахо-
дим:

$$I_4 \leq \frac{3h^2}{X} \int_X^{eX} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} x^{i\gamma} \right|^2 dx + \\ + 6X \int_X^{eX} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{x^{i\gamma}}{\frac{1}{2} + i\gamma} \right|^2 dx \\ = \frac{3h^2}{X} I_5 + 6X I_6,$$

где смысл обозначений очевиден.

Положим для удобства $\gamma = eX$ и оценим интегралы I_5 и I_6 . Прежде всего, ^{заменяя γ на γe^{-v} , получим:}

$$I_5 = \int_{\frac{\gamma}{e}}^{\gamma} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} y^{i\gamma} \right|^2 dy = \\ = \int_0^1 \gamma e^{-v} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} \gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma v} \right|^2 dv \leq \\ \leq \gamma \int_0^1 e^{-v^2} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} \gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma v} \right|^2 dv \leq \\ \leq \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} \gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma v} \right|^2 dv = \\ = \gamma \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T_1} \gamma^{i(\gamma_1 - \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2 - i(\gamma_1 - \gamma_2)v} dv \\ = \gamma \sqrt{\pi} \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T_1} \gamma^{i(\gamma_1 - \gamma_2)} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2}.$$

Далее, пользуясь свойством 3, будем иметь:

$$I_5 \leq \gamma \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T_1} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2} \leq \gamma \sum_{\substack{0 \leq k \leq T_1 \\ \text{WHO}}} e^{-\left(\frac{k}{2}\right)^2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq |\gamma_1 - \gamma_2| < n+1} 1 \ll \gamma \sum_{0 \leq n \leq T_1} e^{-\frac{n^2}{4}} \times \\
& \quad 0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T_1 \\
& \quad \times \sum_{0 < \gamma_1 \leq T_1} \left\{ \sum_{\gamma_1 + n \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 + n+1} 1 + \sum_{\gamma_1 - n-1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 - n} 1 \right\} \ll \\
& \ll \gamma \sum_{0 \leq n \leq T_1} e^{-\frac{n^2}{4}} \sum_{0 < \gamma_1 \leq T_1} \varrho_n(\gamma_1 + n+1) \ll \\
& \ll \gamma (\varrho(T_1)) \sum_{0 \leq n \leq T_1} e^{-\frac{n^2}{4}} \sum_{0 < \gamma_1 \leq T_1} 1 \ll \\
& \ll \gamma T_1 \varrho^2(T_1) \sum_{0 \leq n \leq T_1} e^{-\frac{n^2}{4}} \ll \gamma T_1 \varrho^2(T_1).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{\frac{\gamma}{e}}^{\gamma} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{y^{i\gamma}}{\frac{1}{2} + i\gamma} \right|^2 dy \leq \\
&\leq \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{\gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma v}}{\frac{1}{2} + i\gamma} \right|^2 dv = \\
&= \gamma \sqrt{\pi} \sum_{T_1 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} \frac{\gamma^{i(\gamma_1 - \gamma_2)} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2}}{\left(\frac{1}{2} + i\gamma_1\right) \left(\frac{1}{2} - i\gamma_2\right)} \ll \\
&\ll \gamma \sum_{T_1 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} \frac{e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2}}{\gamma_1 \gamma_2} \ll \gamma \sum_{T_1 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq T} \frac{e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2}}{\gamma_1 \gamma_2} \ll \\
&\ll \gamma \sum_{\substack{0 \leq n \leq T \\ \cancel{0 \leq n \leq T}}} e^{-\frac{n^2}{4}} \sum_{T_1 < \gamma_1 \leq T} \frac{1}{\gamma_1} \sum_{\gamma_1 + n \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 + n+1} \frac{1}{\gamma_2}.
\end{aligned}$$

Вновь применяя свойство 3, оценим внутреннюю сумму по порядку величины

$$\frac{\varrho_n(\gamma_1 + n+1)}{\gamma_1 + n} \ll \frac{\varrho(T)}{\gamma_1 + n}.$$

Соответственно,

$$I_6 \ll Y(eT) \sum_{0 \leq n \leq T} e^{-\frac{n^2}{4}} \sum_{T_1 < \gamma_1 \leq T} \frac{1}{\gamma_1(\gamma_1+n)} \ll$$

$$\ll Y(eT) \sum_{T_1 < \gamma_1 \leq T} \frac{1}{\gamma_1} \sum_{0 \leq n \leq T} \frac{e^{-\frac{n^2}{4}}}{\gamma_1+n}.$$

Сумму по n разобьем на две: по $n \leq \gamma_1$ и $\gamma_1 < n \leq T$. Тогда первая оценится величиной

$$\ll \frac{1}{\gamma_1} \sum_{0 \leq n \leq \gamma_1} e^{-\frac{n^2}{4}} \ll \frac{1}{\gamma_1},$$

а вторая — величиной

$$\ll \sum_{\gamma_1 < n \leq T} \frac{e^{-\frac{n^2}{4}}}{n} \ll \sum_{\gamma_1 < n \leq T} \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{\gamma_1}.$$

Таким образом,

$$I_6 \ll Y(eT) \sum_{T_1 < \gamma_1 \leq T} \frac{1}{\gamma_1^2} \ll$$

$$\ll Y(eT) \sum_{T_1 < m \leq T} \frac{1}{m^2} \sum_{m < \gamma_1 \leq m+1} 1 \ll$$

$$\ll Y(eT) \sum_{T_1 < m \leq T} \frac{e^{-\frac{m}{2}}}{m^2} \ll \frac{Y}{T_1} e^{2T}.$$

Итак, имеем:

$$I_4 \ll \frac{h^2}{X} \cdot Y T_1 e^{2T} + X \cdot \frac{Y}{T_1} e^{2T} \ll$$

$$\ll \left(h^2 T_1 + \frac{X^2}{T_1} \right) e^{2T} X.$$

Беря $T_1 = X h^{-1}$, находим:

$$I_4 \ll X h (eX)^2.$$

Следовательно,

$$I_2 \ll I_4 + \frac{X^3}{T^2} a^4 X + X a^2 X \ll$$

$$\ll X h (a^2 X + X a^2 X + \frac{X^3}{T^2} a^4 X) \ll$$

$$\ll X h a^2 X + \frac{X^3}{T^2} a^4 X, \text{ и, наконец,}$$

$$I_1 \ll I_2 + I_3 \ll X h a^2 X + \frac{X^3}{T^2} a^4 X + h \sqrt{X} a^2 X \ll$$

$$\ll X h a^2 X + \frac{X^3}{T^2} a^4 X.$$

Выбирая T равным $X h X$, приходим к утверждению леммы. $\square$

Доказательство теоремы 15. Пусть

$$h = \Phi(aX)^2, \quad \tau(x) = f(x+h) - f(x) - h,$$

где $\Phi = \Phi(X)$. Определим E как множество значений x , $X < x \leq 2X$, для которых

$$|\tau(x)| \geq \frac{h}{\sqrt[3]{\Phi}}.$$

Тогда из леммы 6 заключаем:

$$|E| \left(\frac{h}{\sqrt[3]{\Phi}} \right)^2 \leq \int_E \tau^2(x) dx \leq \int_X^{2X} \tau^2(x) dx \leq c_1 X h (aX)^2.$$

откуда

$$|E| \leq c_1 X \left(\frac{\sqrt[3]{\Phi} aX}{\sqrt{h}} \right)^2 = c_1 \frac{X}{\sqrt[3]{\Phi}}.$$

Для x , не принадлежащих "исключительному" множеству E , имеем: $|\tau(x)| < \frac{h}{\sqrt[3]{\Phi}}$, т.е.

$$h - \frac{h}{\sqrt[3]{\Phi}} \leq f(x+h) - f(x) \leq h + \frac{h}{\sqrt[3]{\Phi}}.$$

В частности,

$$\begin{aligned}
(\pi(x+h) - \pi(x)) \vartheta_1(x+h) &\geq \sum_{x < p \leq x+h} \vartheta_1 p = \\
&= \mathcal{J}_1(x+h) - \mathcal{J}_1(x) \geq h \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\Phi}}\right) \text{ и} \\
\pi(x+h) - \pi(x) &\geq \frac{h}{\vartheta_1(x+h)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\Phi}}\right) = \\
&= \frac{h}{\vartheta_1 x} \left(1 + O\left(\frac{h}{x \vartheta_1 x}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\Phi}}\right) = \\
&= \frac{h}{\vartheta_1 x} (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Верхняя оценка $\pi(x+h) - \pi(x)$ выводится аналогично, $\square$

Доказательство теоремы 16. Основная идея доказательства состоит в отыскании системы непересекающихся интервалов $F_1, \dots, F_m$, содержащихся в промежутке $(1, N]$, имеющих большую суммарную длину $|F| = \sum_{\varepsilon=1}^m |F_\varepsilon|$ и таких, что при любом $x \in F_\varepsilon$ на $(x, x + \frac{h}{2}]$ нет ни одного простого числа u , следовательно,

$$\left(\mathcal{J}_1\left(x + \frac{h}{2}\right) - \mathcal{J}_1(x) - \frac{h}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Итак, имеет $h = c(X)^2$, где c — достаточно большая постоянная. Предположим, что неравенство

$$|N - p - q| \leq 2h$$

не имеет решений в простых числах.

Рассмотрим следующую систему непересекающихся интервалов:

$$E_1 = \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 2h \right], \quad E_{(-1)} = \left(\frac{N}{2} - 2h, \frac{N}{2} \right],$$

$$E_2 = \left(\frac{N}{2} + 2h, \frac{N}{2} + 4h \right], \quad E_{(-2)} = \left(\frac{N}{2} - 4h, \frac{N}{2} - 2h \right],$$

.....

$$E_k = \left(\frac{N}{2} + 2(k-1)h, \frac{N}{2} + 2kh \right],$$

$$E_{(-k)} = \left(\frac{N}{2} - 2kh, \frac{N}{2} - 2(k-1)h \right],$$

где $k = \left[\frac{1}{8} N h^{-1} \right]$. Очевидно, все они содержатся в промежутке $\left(\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} \right]$. Отметим, что при любом ε , $1 \leq \varepsilon \leq k$, хотя бы один из промежутков $E_\varepsilon, E_{(-\varepsilon)}$ свободен от простых чисел. Действительно, если бы нашлись простые $p \in E_\varepsilon$ и $q \in E_{(-\varepsilon)}$, то для них были бы выполнены неравенства

$$\frac{N}{2} + 2(\varepsilon-1)h < p \leq \frac{N}{2} + 2\varepsilon h,$$

$$\frac{N}{2} - 2\varepsilon h < q \leq \frac{N}{2} + 2(\varepsilon-1)h,$$

сложив которые, мы имели бы

$$N - 2h < p + q \leq N + 2h,$$

что противоречит предположению.

Если E_ε свободен от простых чисел, то для всякой точки $x \in E_\varepsilon$,

$$F_\varepsilon = \left(\frac{N}{2} + 2(k-1)h, \frac{N}{2} + (2k-1)h \right], \text{ имеем:}$$

$[x, x+h]$ содержится в E_ε и свободен от простых чисел, так что

$$(\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x) - h)^2 \equiv h^2. \quad (1)$$

В случае, когда свободным от простых оказывается промежуток $E(\tau)$, указанным свойством будет обладать

$$F_\tau = \left(\frac{N}{2} - 2kh, \frac{N}{2} - (2k-1)h \right).$$

Так мы построили систему из k непересекающихся промежутков суммарной длины $kh \geq \frac{1}{9}N$, лежащих в

$\left(\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} \right]$, на которой поочередно выполняется равенство (1). Значит,

$$\sum_{\tau=1}^k \int_{F_\tau} (\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x) - h)^2 dx \geq h^2 \frac{N}{9}.$$

С другой стороны, по лемме 6 эта сумма не превосходит

$$\int_{\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}} (\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x) - h)^2 dx \leq c_1 N h (eN)^2,$$

так что
$$\frac{Nh^2}{9} \leq c_1 N h (eN)^2$$

и
$$h \leq 9c_1 (eN)^2.$$

Если $c > 9c_1$, то последнее неравенство приводит к противоречию, которое и доказывает теорему. $\square$

Приложение 2 (лекция 9)

Эта лекция посвящена связи простых чисел с явлением так называемой парной корреляции нулей дзета-функции Римана.

Положим $w(a) = \frac{4}{4+a^2}$ и для произвольных чисел x, T с условиями $x \geq x_0 \geq 2$, $T \geq T_0 \geq 2$ рассмотрим сумму

$$F(x; T) = \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} x^{i(\gamma_1 - \gamma_2)} w(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Поскольку γ_1 и γ_2 входят в выражение для $F(x; T)$ симметрично, сумма $F(x; T)$ является вещественным числом. Более того, оказывается (мы докажем это ниже), что $F(x; T) \geq 0$. В ряде задач теории простых чисел важную роль играет верхняя оценка $F(x; T)$ при различных соотношениях между x и T .

Тривиальная оценка приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} F(x; T) &\leq \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} w(\gamma_1 - \gamma_2) \leq 2 \sum_{0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq T} \frac{4}{4 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2} \\ &\leq 8 \sum_{0 \leq n \leq T} \sum_{0 < \gamma_1 \leq T} \sum_{\gamma_1 + n \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 + n + 1} \frac{1}{4 + n^2} \ll \\ &\ll \sum_{0 \leq n \leq T} \sum_{0 < \gamma_1 \leq T} \frac{e_n(\gamma_1 + n + 1)}{n^2 + 1} \ll \\ &\ll (e_n T) \sum_{0 \leq n \leq T} \frac{1}{n^2 + 1} \sum_{0 < \gamma_1 \leq T} 1 \ll T e^2 T \end{aligned}$$

или, что то же,

$$F(x; T) \ll N(T) O(T^{-1}).$$

Х. Монгомери показал, однако, что если гипотеза Римана верна, то

$$\frac{F(x; T)}{N(T)} = \frac{O(x)}{O(T)} + o(1)$$

при любых x и T с условием $T^\varepsilon \leq x \leq T^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ - сколь угодно малое фиксированное число. (Справедливость этого асимптотического равенства при $T^{1-\varepsilon} \leq x \leq T$ была выведена из гипотезы Римана несколько позже Ф. Голдстоном). Кроме того, он высказал следующее предположение: если $c > 1$ - произвольная фиксированная константа, то

$$\frac{F(x; T)}{N(T)} = 1 + o(1)$$

равномерно по x , $T \leq x \leq T^c$. Это предположение называется гипотезой о парной корреляции нулей $\xi(s)$ или гипотезой Монгомери.

При доказательстве теорем 14 и 15 возникали интегралы вида

$$J(Y, T) = \int_{\frac{Y}{e}}^Y \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} y^{i\gamma} \right|^2 dy.$$

Следующая лемма устанавливает связь между этими интегралами и функцией $F(x; T)$.

Лемма 7. Справедливо неравенство:

$$J(\gamma, T) \leq e\gamma F(\gamma; T).$$

Доказательство. Положим $k(u) = e^{-2|u|}$.

Тогда для любого вещественного a имеем

$$\begin{aligned}\hat{k}(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(u) e^{-iau} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|u| - iau} du = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-u(2+ia)} + e^{-u(2-ia)} \right) du = \\ &= \frac{1}{2+ia} + \frac{1}{2-ia} = \frac{4}{4+a^2} = w(a)\end{aligned}$$

(или, иначе говоря, преобразование Фурье функции k совпадает с w), Далее, положим $y = \gamma e^{-u}$ в исходном интеграле; получим:

$$\begin{aligned}J(\gamma, T) &= \gamma \int_0^1 e^{-u} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} \gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma u} \right|^2 du \leq \\ &\leq e\gamma \int_0^1 e^{-2u} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} \gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma u} \right|^2 du \leq \\ &\leq e\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} k(u) \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} \gamma^{i\gamma} e^{-i\gamma u} \right|^2 du = \\ &= e\gamma \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} \gamma^{i(\gamma_1 - \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u) e^{-iu(\gamma_1 - \gamma_2)} du = \\ &= e\gamma \sum_{0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq T} \gamma^{i(\gamma_1 - \gamma_2)} w(\gamma_1 - \gamma_2) = e\gamma F(\gamma; T),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 7, в предположении справедливости гипотез Римана и Монгомери, позволяет уточнить оценку интеграла

$$I_1(X; h) = \int_X^{2X} (\vartheta(x+h) - \vartheta(x) - h)^2 dx$$

из леммы 6 и, соответственно, утверждения теорем 15 и 16. Имеет место лемма 8. Пусть гипотезы Римана и Мангольда верны. Тогда существуют абсолютные постоянные c и c_1 такие, что для достаточно больших X и h с условиями $c \leq h \leq \frac{1}{2} \sqrt{X}$ выполняется оценка

$$I_1(X; h) \leq c_1 X (h \sqrt{X} + (eX)^2).$$

Доказательство. Выше было установлено неравенство

$$I_1(X; h) \leq \frac{h^2}{X} I_5 + X I_6 + \frac{X^3}{T^2} (eX)^4 + X (eX)^2 + h \sqrt{X} (eX)^2,$$

в котором

$$I_5 = \int_X^{eX} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T_1} x^{i\gamma} \right|^2 dx,$$

$$I_6 = \int_X^{eX} \left| \sum_{T_1 < \gamma \leq T} \frac{x^{i\gamma}}{\frac{1}{2} + i\gamma} \right|^2 dx,$$

а T_1 и T — произвольные числа, x с условиями $2 \leq T_1 \leq \frac{1}{10} T \leq x$. Будем дополнительно считать, что T_1 и T удовлетворяют неравенствам

$$\frac{X}{(eX)^A} \leq T_1 < X < T \leq X (eX)^B,$$

где A, B — некоторые положительные абсолютные постоянные.

В силу леммы 7 и гипотезы Монгомери,

$$I_5 \leq e^2 X F(eX; \pi_1) = e^2 X N(\pi_1) (1 + o(1)) \ll \\ \ll X \pi_1 \wedge \pi_1 \ll X \pi_1 \wedge X.$$

Далее, преобразуем интеграл I_6 следующим образом. Полагая

$$C(u) = \sum_{\pi_1 < \gamma \leq u} \alpha^i \gamma \quad \text{при } \pi_1 \leq u \leq T$$

и пользуясь формулой суммирования Абеля в форме, представленной в выражении 2 к лемме 1, получим:

$$\sum_{\pi_1 < \gamma \leq T} \frac{\alpha^i \gamma}{\frac{1}{2} + i\gamma} = \frac{C(T)}{\frac{1}{2} + iT} - \int_{\pi_1}^T C(u) d \frac{1}{\frac{1}{2} + iu},$$

откуда

$$I_6 \leq 2 \int_X^{eX} \left(\frac{|C(T)|^2}{T^2} + \left(\int_{\pi_1}^T \frac{|C(u)|}{u^2} du \right)^2 \right) dx.$$

Согласно неравенству Коши,

$$\left(\int_{\pi_1}^T \frac{|C(u)|}{u^2} du \right)^2 = \left(\int_{\pi_1}^T \frac{1}{u^{3/4}} \cdot \frac{|C(u)|}{u^{5/4}} du \right)^2 \leq \\ \leq \left(\int_{\pi_1}^T \frac{du}{u^{3/2}} \right) \int_{\pi_1}^T \frac{|C(u)|^2}{u^{5/2}} du \leq \\ \leq \frac{2}{\sqrt{\pi_1}} \int_{\pi_1}^T |C(u)|^2 \frac{du}{u^{5/2}}.$$

Следовательно,

$$I_6 \leq \frac{2}{\pi^2} \int_X^{eX} \left| \sum_{\pi_1 < \gamma \leq T} \alpha^i \gamma \right|^2 dx + \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi_1}} \int_{\pi_1}^T \frac{1}{u^{5/2}} \int_X^{eX} \left| \sum_{\pi_1 < \gamma \leq u} \alpha^i \gamma \right|^2 dx du.$$

Заметим теперь, что

$$\left| \sum_{\pi_1 < \gamma \leq u} \alpha^{i\gamma} \right|^2 = \left| \left(\sum_{0 < \gamma \leq u} - \sum_{0 < \gamma \leq \pi_1} \right) \alpha^{i\gamma} \right|^2 \leq$$

$$\leq 2 \left| \sum_{0 < \gamma \leq u} \alpha^{i\gamma} \right|^2 + 2 \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi_1} \alpha^{i\gamma} \right|^2.$$

Поэтому, вновь применяя лемму 7, будем иметь:

$$I_6 \leq \frac{4}{\pi^2} \int_X^{eX} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi} \alpha^{i\gamma} \right|^2 dx + \frac{4}{\pi^2} \int_X^{eX} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi_1} \alpha^{i\gamma} \right|^2 dx$$

$$+ \frac{8}{\sqrt{\pi_1}} \int_{\pi_1}^{\pi} \frac{1}{u^{5/2}} \left\{ \int_X^{eX} \left| \sum_{0 < \gamma \leq u} \alpha^{i\gamma} \right|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int_X^{eX} \left| \sum_{0 < \gamma \leq \pi_1} \alpha^{i\gamma} \right|^2 dx \right\} du \leq$$

$$\leq \frac{4e^2}{\pi^2} X (F(eX; \pi) + F(eX; \pi_1)) +$$

$$+ \frac{8X}{\sqrt{\pi_1}} \int_{\pi_1}^{\pi} \frac{1}{u^{5/2}} (F(eX; u) + F(eX; \pi_1)) du.$$

Согласно гипотезе Монгомери,

$$F(eX; u) \ll N(u) \ll u \text{ и } u \ll u \text{ и } X$$

при $\pi_1 \leq u \leq \pi$. Поэтому

$$I_6 \ll \frac{X}{\pi^2} \cdot \pi \text{ и } X + \frac{X}{\sqrt{\pi_1}} \int_{\pi_1}^{\pi} \frac{u \text{ и } X}{u^{5/2}} du \ll$$

$$\ll \frac{X}{\pi} \text{ и } X + \frac{X}{\pi_1} \text{ и } X \ll \frac{X}{\pi_1} \text{ и } X.$$

Таким образом,

$$I_1(X; h) \ll \frac{h^2}{X} X \pi_1 \text{ и } X + \frac{X^2}{\pi_1} \text{ и } X +$$

$$+ \frac{X^3}{T^2} (ex)^4 + X(ex)^2 + h\sqrt{X}(ex)^2 \ll$$

$$\ll \left(h^2 T_1 + \frac{X^2}{T_1} \right) ex + \frac{X^3}{T^2} (ex)^4 +$$

$$+ X(ex)^2.$$

Пологая $T_1 = Xh^{-1}$, $T = X(ex)^2$, приходим к искомо́й оценке. $\square$

Следствие. Если $h \geq ex$, то при выполнении прочих условий леммы 8 имеет место оценка: $I_1(X; h) \leq c_1 Xh ex$.

Теорема 17. Пусть верны гипотезы Римана и Монгомери, и пусть $\Phi(X)$ — произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $X \rightarrow +\infty$ функция. Тогда для всех x , $X < x \leq 2X$, за исключением $O\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi(X)}}\right)$ значений, промежутке $(x, x+h]$, $h = \Phi(X)ex$, содержится $\frac{h}{ex} (1 + o(1))$ простых чисел.

Теорема 18. Пусть верны гипотезы Римана и Монгомери. Тогда существует абсолютная постоянная $c \geq 1$ такая, что для всех достаточно больших N и $h = cN$ неравенство

$$|N - p - q| \leq h$$

разрешимо в простых числах p и q .

Доказательства этих утверждений практически дословно повторяют доказательства теорем 15 и 16.

Замечание 1. В действительности доказательство леммы 8 опирается на утверждение более слабое, чем гипотеза о парной корреляции. Именно, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$F(x; T) \ll N(T) \ll T e^T$$

для всех x и T , удовлетворяющих условиям $T \leq x \leq c_0 T (e^T)^2$, где $c_0 > 1$ — достаточно большая постоянная.

Замечание 2. Теорема 17 принадлежит Д. Хиз-брауну (1982). Им же получены и ряд других результатов о простых числах, опирающихся на различные ^(предположение о) поведения функции $F(x; T)$. Отметим лишь один из них: если $F(x; T) = \bar{o}(T e^{2T})$ равномерно по $T \leq x \leq T^c$, где $c > 1$ — сколь угодно большое фиксированное число, то, ~~$\forall \lambda \neq 1$~~ в предположении справедливости гипотезы Римана

$$\psi(x) = x + \bar{o}(\sqrt{x} (e^x)^2), \quad x \rightarrow +\infty$$

(сравните это утверждение с теоремой 9).

Замечание 3. Теорема 17 не может быть значительно усилена. Можно показать, что при любом фиксированном λ , $0 < \lambda < 1$,

и $h = \lambda \ln X$ мера множества тех точек x из промежутка $[X, 2X]$, для которых промежуток $(x, x+h]$ не содержит ни одного простого числа, оказывается не меньше $c \cdot X$, где $c = c(\lambda) > 0$ — некоторая постоянная (или, иначе говоря, "положительная доля" промежутков $(x, x+h]$ не содержит простых чисел).

(Продолжение замечания на стр. 28)

Величина $O(\ln^2 \pi)$ возникает по ходу доказательства леммы 3 при оценке величины

$$\sum_{|x-u| \leq 1} \Lambda(u) j\left(\frac{x}{u}, \theta; \pi\right).$$

Покажем, что каждый из интегралов в этой сумме ограничен по модулю абсолютной константой. Действительно, пусть $u = x + \theta$, где $-1 \leq \theta \leq 1$. Тогда, обозначая $\frac{x}{u} = a$,

будем иметь:

$$j(a, \theta; \pi) = \frac{a^\theta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^{it}}{\theta + it} dt =$$

$$= \frac{a^\theta}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \operatorname{Re} \frac{a^{it}(\theta - it)}{\theta^2 + t^2} dt =$$

$$= \frac{a^\theta}{\pi} (j_1 + j_2), \text{ где}$$

$$j_1 = \int_0^{\pi} \frac{\theta \cos(t \ln a)}{\theta^2 + t^2} dt,$$

$$j_2 = \int_0^{\pi} \frac{t \sin(t \ln a)}{\theta^2 + t^2} dt$$

Очевидно,

$$|j_1| \leq \int_0^{\pi} \frac{\theta dt}{\theta^2 + t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{\theta}} \frac{du}{1+u^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Далее,

$$j_2 = \int_0^{\pi} \frac{t}{\theta} \cdot \frac{\sin(t \ln a)}{1 + \frac{t^2}{\theta^2}} d\frac{t}{\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{\theta}} \frac{u \sin(u \ln a)}{1+u^2} du$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\theta \leq 0$, т.е. $\ln a > 0$. Пологая для краткости $\gamma \pi = \frac{\pi}{\theta}$, $c = \theta \ln a$, получим:

$$j_2 = \int_0^Y \frac{u \sin(cu)}{1+u^2} du.$$

Предположим сперва, что $Y \leq \frac{1}{c}$. Тогда

$$|j_2| \leq \int_0^Y \frac{u \cdot cu}{1+u^2} du < cY \leq 1.$$

Пусть теперь $Y > \frac{1}{c}$. В этом случае разбиваем интеграл j_2 на два:

$$j_2 = \left(\int_0^{\frac{1}{c}} + \int_{\frac{1}{c}}^Y \right) \frac{u \sin(cu)}{1+u^2} du = j_3 + j_4.$$

В силу доказанного выше, $|j_3| \leq 1$. Полагая $v = cu$ в j_4 , находим:

$$j_4 = \int_1^Z \frac{\frac{v}{c} \cdot \frac{\sin v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{dv}{c}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \int_1^Z \frac{v \sin v}{v^2 + c^2} dv,$$

где $Z = \frac{Y}{c} > 1$. Интегрирование по частям дает:

$$j_4 = - \frac{v \cos v}{v^2 + c^2} \Big|_1^Z - \int_1^Z \frac{v^2 - c^2}{(v^2 + c^2)^2} \cos v dv,$$

$$|j_4| < \cos 1 + \frac{1}{Z} + \int_1^Z \frac{dv}{v^2} = \cos 1 + 1 < \frac{3}{2},$$

$$\text{откуда } |j_2| < \frac{5}{2},$$

$$|j(a, b, T)| \leq \frac{a^6}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} \right) < \frac{3}{2} a^6 < \frac{3}{2} \cdot 2^6 \leq \leq 3e, \text{ что и требовалось.}$$