Современные проблемы теории групп.

Р. И. Григорчук.

1 Некоторые напоминания

G – группа

Множество с ассоциативной бинарной операцией "$\circ$" и выделенным элементом $e \in G$, называемом единицей, так что:

(i) $eg = ge = g \quad \forall g \in G$

(ii) $\forall g \in G \;\; \exists g' \in G$ т.ч. $gg' = g'g = e$

g' обозначается g^{-1} – обратный элемент.

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = abc$ – ассоциативность

Символ операции "$\circ$" обычно опускается.

Другие используемые символы операции $+$ (если группа коммутативна), $\circ$ если операция суперпозиция отображений.

Группа коммутативна (абелева) если $ab = ba \quad \forall\, a, b \in G$.

Примеры $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$

$GL_n(k)$ – группа обратимых $n \times n$ матриц с элементами из поля (или коммутативного кольца)

$SL_2(\mathbb{Z})$ – целочисленные 2×2 матрицы с определителем $= 1$.

$(U, \cdot) \quad U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$Sym(X)$ – группа биекций множества X с операцией суперпозиции.

Если $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ то $Sym(X) = S_n$ - симметрическая группа степени n.

Группы изучаются с точностью до изоморфизма.

Подмножество $S \subset G$ называется системой образующих (или порождающих) если любой элемент $g \in G$ представим в виде произведения элементов из $S \cup S^{-1}$:

$$(*) \quad g = s_{i_1}^{\pm 1} s_{i_2}^{\pm 1} \ldots s_{i_n}^{\pm 1}, \quad s_{i_j} \in S$$

Пишется $G = \langle S \rangle$

Минимальная длина в представлении $(*)$ называется длиной элемента g и обозначается

$\boxed{|g| \text{ - длина.}}$

$(\mathbb{Q}, +)$ - бесконечно порожденая группа.

$SL_2(\mathbb{Z})$ - конечно порожденная группа.

Нас в основном интересуют бесконечные конечно-порожденные группы.

Пример. $F_2 = \langle a, b \rangle$ - свободная группа с двумя образующими.

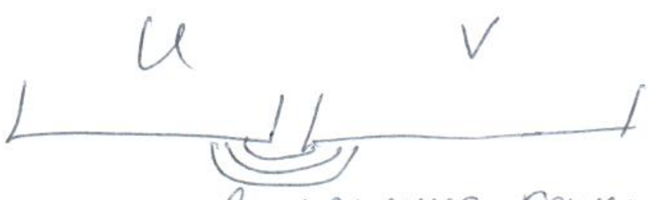
Элементы - несократимые слова над алфавитом a, a^{-1}, b, b^{-1}

$$xx^{-1}, \quad x^{-1}x \qquad x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$$

запрещены.

Операция $u, v \in F_2$

$u \cdot v =$ результат сокращения в слове uv



возможные сокращения

Упражнение. Проверить, что это группа.

② Некоторые классы групп.

абелевы

$\cap$

нильпотентные

$\cap$

разрешимые

$\cap$

элементарно аменабельные

$\cap$

аменабельные

$\cap$

софические

Тождества

$\boxed{[x,y]=1}$ – тождество коммутативности

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy=1 \Leftrightarrow xy=yx$$

$[[x_1,x_2],x_3]\overset{=1}{}$ – нильпотентность класса (степени) 2.

$[\ldots[[x_1,x_2],x_3],\ldots,x_n]\overset{=1}{}$ – нильпотентность класса $n-1$

Пример.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$ – группа Гейзенберга.

нильпотентная класса 2.

$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 1$. разрешимость степени 2. (метабелевость).

Пример. $BS(1,n) = \langle a, b \mid ab = b^n a \rangle$

$\mathcal{L} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right) \rtimes \mathbb{Z}$ – лэмплайтер.

$G' = [G, G]$ – коммутаторная подгруппа.

(порождена коммутаторами $[a, b]$, $a, b \in G$).

$$\boxed{G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \text{ – ряд производных подгрупп.}}$$

G разрешима если $G^{(n)} = \{1\}$ для некоторого n.

$G^{(2)} = \{1\}$ – метабелева.

③ Графы Кэли и Шрейера.

$G = \langle S \rangle$

$\Gamma = \Gamma(G, S) = (V, E)$

Граф Кэли

вершины

ребра.

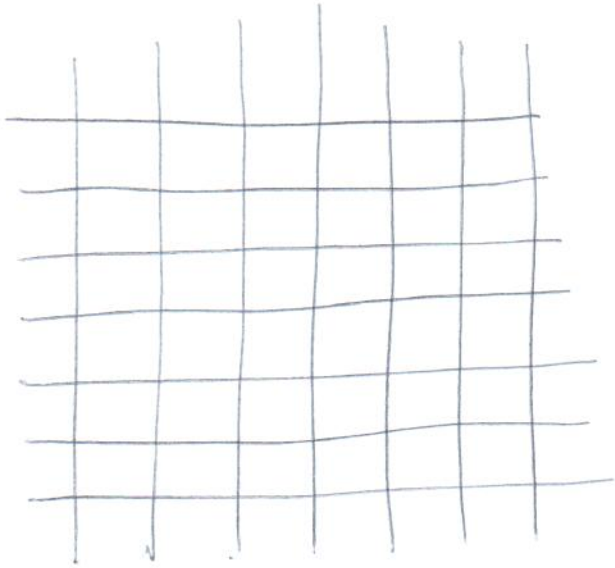
Ориентированный

раскрашенный

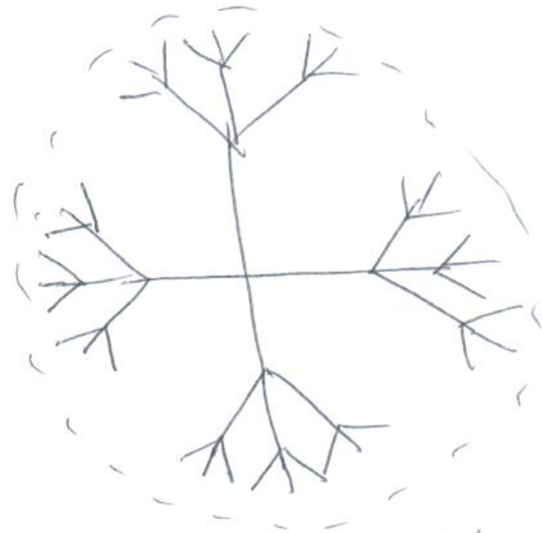
$V = G$

$g \xrightarrow{s} sg$

$E = \{(g, sg) \mid g \in G, s \in S\}$



$\mathbb{Z}^2$ - свободная абелева группа.



F_2 - свободная группа

$G \geqslant H$ – подгруппа

$\Gamma(G, H, S)$ – граф Шрейера

$V = \{ gH \mid g \in G \}$

левый класс смежности

$E = \{ (gH, sgH) \mid g \in G, s \in S \}$

Графы Кэли (и Шрейера) регулярные (т. е. валентности всех вершин одинаковые).

---

④ $\boxed{\text{Аппроксимируемость.}}$

Определение. G финитно аппроксимируема если $\forall g \in G \ \exists \varphi : G \to K$ – гомоморфизм в конечную группу K, такой, что

$$\varphi(g) \neq 1.$$

$\Rightarrow \forall F \subset G, \ |F| < \infty \ \ \exists \varphi : G \to K$

т. ч.

$$\varphi(a) \neq \varphi(b) \quad \forall a, b \in F, \ a \neq b.$$

$\Rightarrow$ куски графа Кэли группы G можно аппроксимировать кусками графов Кэли конечных групп.

Обобщения: Аппроксимируемость нильпотентными, разрешимыми, аменабельными, ... группами.

---

5 $\boxed{\text{Периодичность.}}$

Порядок элемента g

$$O(g) = \begin{cases} \min \ n \in \mathbb{N} \text{ такое, что } g^n = 1. \\ \infty \ \text{ если такого } n \text{ нет.} \end{cases}$$

Группа называется периодической (torsion) если каждый элемент имеет конечный порядок.

Пример $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, любая конечная группа.

Группа называется свободной от кручения если у нее нет элементов конечного порядка (за исключением единичного элемента).

Пример, $(\mathbb{Q}, +)$, F_2 – свободная группа.

Периодические группы и свободные от кручения группы – важные классы в теории групп.

---

6 Проблема Бернсайда.

1902 год. [Общая проблема Бернсайда]

(A) Верно ли, что каждая конечно порожденная периодическая группа конечна?

(B) [Ограниченная проблема Бернсайда]

Верно ли, что конечнопорожденная периодическая группа, у которой порядки элементов ограничены в совокупностью некоторой константой, конечна?

[$\Leftrightarrow$ выполнено тождество $X^N = 1$ для некоторого натурального N].

(C) [Ослабленная проблема Бернсайда, Magnus]. Верно ли, что каждая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа ~~конечна~~ с ограниченными в совокупности порядками элементов конечна?

Ответы.

(A) Нет. Е. Голод 1964 (решение основано на использовании неравенства Голода – Шафаревича:

Теорема [Голод]. Для всякого простого

числа p существует бесконечная 2-порожденная p-группа.

$$\left[\forall g \in G \ \exists n = n(g) \text{ т.ч. } g^{p^n} = 1 \right].$$

(B) Нет. П.С. Новиков, С.И. Адян 1967

Теорема. [Новиков, Адян] Свободные периодические группы Бернсайда

$$B(m,n) = \langle a_1, \dots, a_m \mid X^n = 1 \rangle \quad (*).$$

бесконечны если $m \geq 2$, n нечетно и ≥ 665.

Проблема. При каких m и n группа $B(m,n)$ конечна?

Известно, что $B(m,n)$ конечна при $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Проблема. Конечны ли группы $B(2,5)$, $B(2,7)$, $B(2,8)$, $B(2,9)$?

$$\boxed{B(2,5)}\ !!!$$

(C) Да. [Е. Зельманов, 1991].

Решение основано на результатах о локальной нильпотентности градуированных алгебр Ли, удовлетворяющих специальным тождествам.

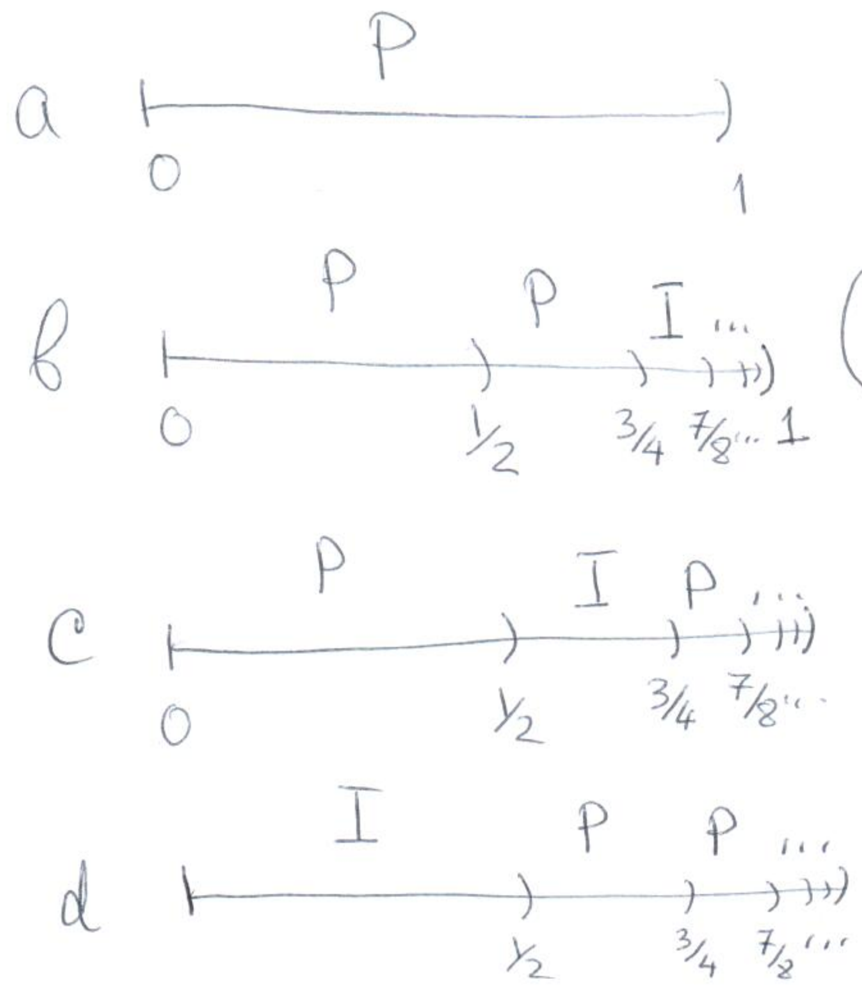
Пример [Р. Григорчук, 1980].

$\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \rangle$ — бесконечная 2-группа финитно-аппроксимируемая.

$\mathcal{G} \curvearrowright [0,1)$ $\quad$ P — перестановка

I=identity

тождественное преобразование



$(PPI)^\infty$ – периодическое слово

$(PIP)^\infty$

$(IPP)^\infty$

операция – композиция отображений

$$\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \mid 1 = a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = \sigma^k((ad)^4) = \sigma^k((adacac)^4),\ k = 0, 1, 2, \dots \rangle$$

$$\sigma : \begin{cases} a \to aca \\ b \to d \\ c \to b \\ d \to c \end{cases}$$

Задание образующими и соотношениями.

подстановка.

Все известные периодические группы, включая группу $\mathcal{G}$, не являются конечно представимыми (не могут быть описаны конечным множеством соотношений между образующими).

Проблема. Верно ли что конечно определенная периодическая круппа конечна? [Аналог проблемы Бернсайда в классе конечно определенных ~~периодических~~ групп].

$$G = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1 \rangle$$

$r_i = r_i(a_\mu^{\pm 1})$ – соотношения.

7 Рост групп. Проблема Милнора.

$G = \langle S \rangle$ – конечно порожденная группа.

$|g|$ – длина., функция роста

$$\boxed{\gamma(n) = \gamma_G^S(n) = \#\{g \in G \mid |g| \leq n\} = \# B(n)}$$

$B(n)$ – "шар" радиуса n в графе Кэли

Сравнение функций:

$\gamma_1(n) \prec \gamma_2(n) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{N}$ т.ч.

$$\gamma_1(n) \leq C \gamma_2(Cn) \quad \forall n$$

$$\gamma_1(n) \sim \gamma_2(n) \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma_1(n) \prec \gamma_2(n) \\ \gamma_2(n) \prec \gamma_1(n) \end{cases}$$

эквивалентность.

$[\gamma(n)]$ – класс эквивалентности – инвариант

Примеры: $P_d(n) \sim n^d$

$\uparrow$ полином степени d.

$a^n \sim e^n \sim 2^n$ для $\forall\, a > 1$

$e^{n^\alpha} \nsim e^{n^\beta}$ при $\alpha \neq \beta$

---

n^α — степенной рост.

e^n — экспоненциальный

$\forall \alpha > 0 \quad n^\alpha \prec \gamma(n) \underset{\nsim}{\preceq} e^n$

$\uparrow$ промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным.

Упражнение. а) $\gamma_G^A(n) \sim \gamma_G^B(n)$ для любых двух систем порождающих A и B.

в) Пусть H подгруппа конечного индекса в G. Тогда

$$\gamma_H(n) \sim \gamma_G(n).$$

Примеры. (i) $\gamma_{\mathbb{Z}^d}(n) \sim n^d$.

(ii) $\gamma_{F_k}(n) \sim e^n$, F_k - свободная группа ранга $k \geqslant 2$.

(iii) $\gamma_{S_g}(n) \sim e^n$, $S_g = \pi_1($  $)$

фундаментальная группа замкнутой ориентируемой поверхности рода g.

(iv) $\gamma_{\text{Гейзенберг}}(n) \sim n^4$.

Теорема [Милнор, Вольф, Басс, Гиварч, Хартли, ...]

а) Нильпотентные группы имеют полиномиальный рост. При этом

$$\gamma(n) \sim n^d \text{ где } d = \sum k \operatorname{rank}_{\mathbb{Q}} \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$$

в) Разрешимая группа имеет экспоненциальный рост если только она не является почти нильпотентной.

Теорема [М. Громов] Группа имеет полиномиальный рост тогда и только тогда когда она почти нильпотентна.

почти нильпотентна - содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Проблема. Дж. Милнор. 1967. Верно ли, что рост конечнопорожденной группы либо полиномиален либо экспоненциален?

Ответ [Р. И. Григорчук] Нет

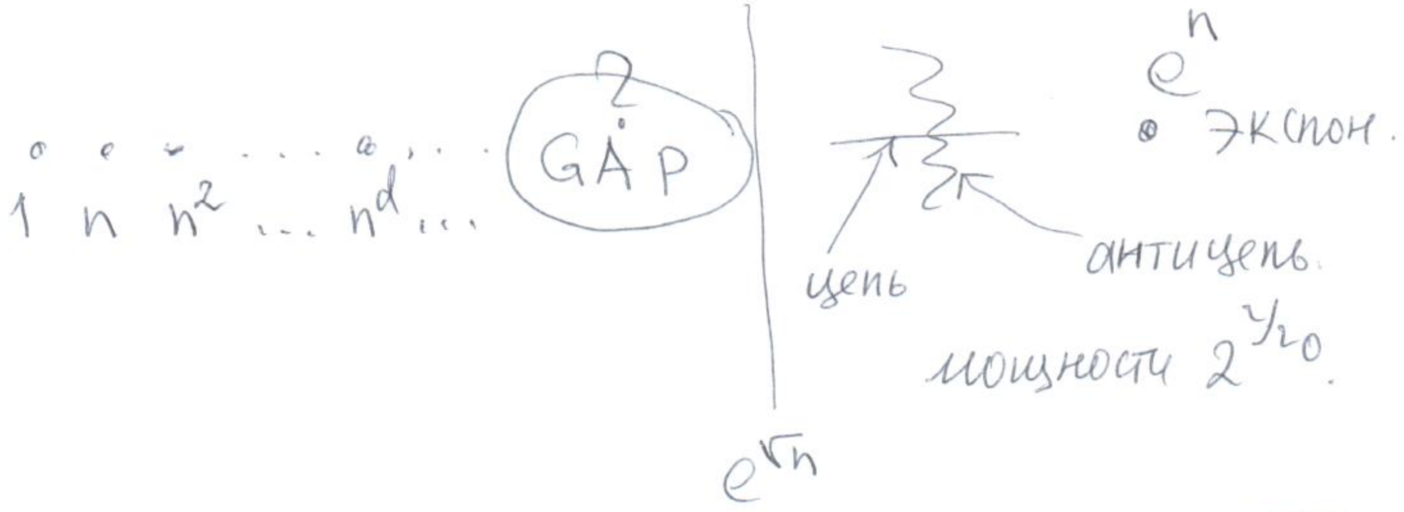
a) Группы промежуточного роста (между полиномиальным и экспоненциальным) существуют. Группа $\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \rangle$ такова.

в) Их много. Более того, существует континуально много групп с различными порядками роста.

Проблема. Существует ли конечно определенная группа промежуточного роста?

Теорема [Р. Григорчук] Если группа аппроксимируется ~~конечными~~ нильпотентными группами и её рост $< e^{\sqrt{n}}$ то рост полиномиальный (и следовательно группа почти нильпотентна).

Гипотеза [Григорчук] Предыдущая Теорема верна для класса всех конечно порожденных групп.



Известно (Эршлер-Жанг), что

$$\gamma_{my}(n) \sim e^{n^{0.7675\ldots}} \qquad (*).$$

Проблема Построить группу промежуточного роста с ростом меньшим чем (*).

8 Гипотезы Пуанкаре и Эндрюса–Кэртиса.

$$G = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle \quad (*)$$

r_i – relators, $r_i = r_i(a_\mu^{\pm 1})$.

$r_i(a_\mu) = 1$ – соотношение.

Задание порождающими и соотношениями.

$(*)$ сбалансировано если $m = n$.

Пример. Задание

$$\langle a_1, \dots, a_m \mid a_1, \dots, a_m \rangle \simeq \{1\} \quad (**)$$

$(**)$ задает тривиальную группу.

Нильсеновские преобразования на множестве слов.

(i) $w \to w^{-1}$

(ii) перестановки слов.

(iii) Слово w_i из набора $\{w_1, \dots, w_i, \dots, w_j \dots\}$ заменяется на слово $w_i w_j$, $i \neq j$.

Пусть F_m - свободная группа ранга m с базисом $a_1, \dots, a_m$.

Факт. Группа, порожденная нильсеновскими преобразованиями, примененными к набору $\{a_1, \dots, a_m\}$ является группой автоморфизмов свободной группы F_m.

$$\mathrm{Aut}(F_m).$$

(iv) Обобщенное нильсеновское преобразование.

$W \longrightarrow U^{-1} W U$, где U произвольное слово, $U = U(a_\mu^{\pm 1})$.

Гипотеза [Endrews - Curtis]. Сбалансированное задание

$$\langle a_1, \ldots, a_m \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$$

определяет тривиальную группу тогда и только тогда когда набор слов $\{r_1, \ldots, r_m\}$ обычными и обобщенными (~~[illegible]~~) нильсеновскими преобразованиями приводится к стандартному виду

$$\langle a_1, \ldots, a_m \mid a_1, \ldots, a_m \rangle$$

Переформулировка. [Григорчук, Курчанов]

$$F_m = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$$

свободные группы.

$$F_M = \langle a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_M \rangle$$

$$m < M$$

$\psi: F_M \twoheadrightarrow F_m$ стандартный эпиморфизм.

$$\psi: \begin{cases} a_1 \to a_1 \\ \dots\dots \\ a_m \to a_m \\ a_{m+1} \to 1 \\ \dots\dots \\ a_M \to 1 \end{cases}$$

Предложение. Всякий эпиморфизм $\varphi: F_M \twoheadrightarrow F_m$ может быть представлен в виде $\varphi = \psi \circ \alpha$

$$\alpha \circlearrowright F_M \xrightarrow{\psi} F_m$$

для некоторого автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_M)$.

$$F_m = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$$

$$F_m' = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$$

$$F_{2m} = \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \rangle$$

Нас интересует описание эпиморфизмов

$$F_{2m} \xrightarrow{\varphi} F_m \times F_m^{'} . \qquad (*)$$

Гомоморфизм

$\rho \rightleftharpoons \rho_0 \times \rho_1$ где

$$\rho_0 : \begin{cases} a_1 \to a_1 \\ \dots \\ a_m \to a_m \\ b_1 \to 1 \\ \dots \\ b_m \to 1 \end{cases} \qquad \rho_1 : \begin{cases} a_1 \to 1 \\ \dots \\ a_m \to 1 \\ b_1 \to b_1 \\ \dots \\ b_m \to b_m \end{cases}$$

назовем стандартным эпиморфизмом.

Гипотеза [Эквивалентна гипотезе ЭК].

Всякий эпиморфизм φ из $(*)$ может быть представлен в виде $\varphi = \beta \circ \rho$ где $\beta \in Aut(F_{2m})$.

$$\beta \circlearrowright F_{2m} \xrightarrow{\rho} F_m \times F_m^{'}$$

Гипотеза Пуанкаре [Решена Перельманом ~1993] Всякое связное односвязное замкнутое многообразие размерности 3 гомеоморфно сфере S^3.

Переформулировка. Гипотеза Пуанкаре верна тогда и только тогда когда для любого рода $g \geq 2$. произвольный эпиморфизм φ

$$\pi_1(S_g) \xrightarrow{\varphi} F_g \times F_g$$

представляется в виде $\varphi = \alpha \circ \eta$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(\pi_1(S_g))$, η - стандартный эпиморфизм.

Проблема. Доказать гипотезу Пуанкаре теоретико-групповыми методами.

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

$\eta = \eta_0 \times \eta_1$ где η_0, η_1 аналогичны

ρ_0, ρ_1.

$\mathrm{Aut}(\pi_1(S_g))$ изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}(F_{2g})$ состоящих из автоморфизмов сохраняющих циклическое слово $\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]$

(т.е. это слово автоморфизмом переводится в сопряженное к нему).

9 Гипотезы Капланского и проблема Громова

k – поле

$k[G]$ – групповая алгебра

элементы $\sum c_g g$, $c_g \in k$

Гипотеза A [Капланский]. Если G – группа без кручения, то групповая алгебра $k[G]$ (k – произвольное поле) не имеет делителей нуля. | $ab=0 \Rightarrow a=0$ или $b=0$

Гипотеза B [Капланский]. Для произвольной группы G и поля k из $ab=1$ в $k[G]$ следует $ba=1$.

Гипотеза C (Gottschalk) Пусть G - счетная группа, X конечное множество, $\Omega = X^G$ с естественным действием $G \curvearrowright \Omega$ сдвигами:

$$h \cdot \{x_g\}_{g\in G} = \{x_{h^{-1}g}\}_{g\in G}.$$

Пусть $f : \Omega \to \Omega$ непрерывное отображение, коммутирующее с действием G. Если f инъективно, то оно и сюръективно.

Упражнение:
Гипотеза C влечет гипотезу B для конечных полей.

Теорема (М. Громов 1999). Гипотеза Готтшалка верна для софических групп.

Определение софической группы.

$G = \langle B \rangle$, $B = B^{-1}$ – симметрическая система порождающих.

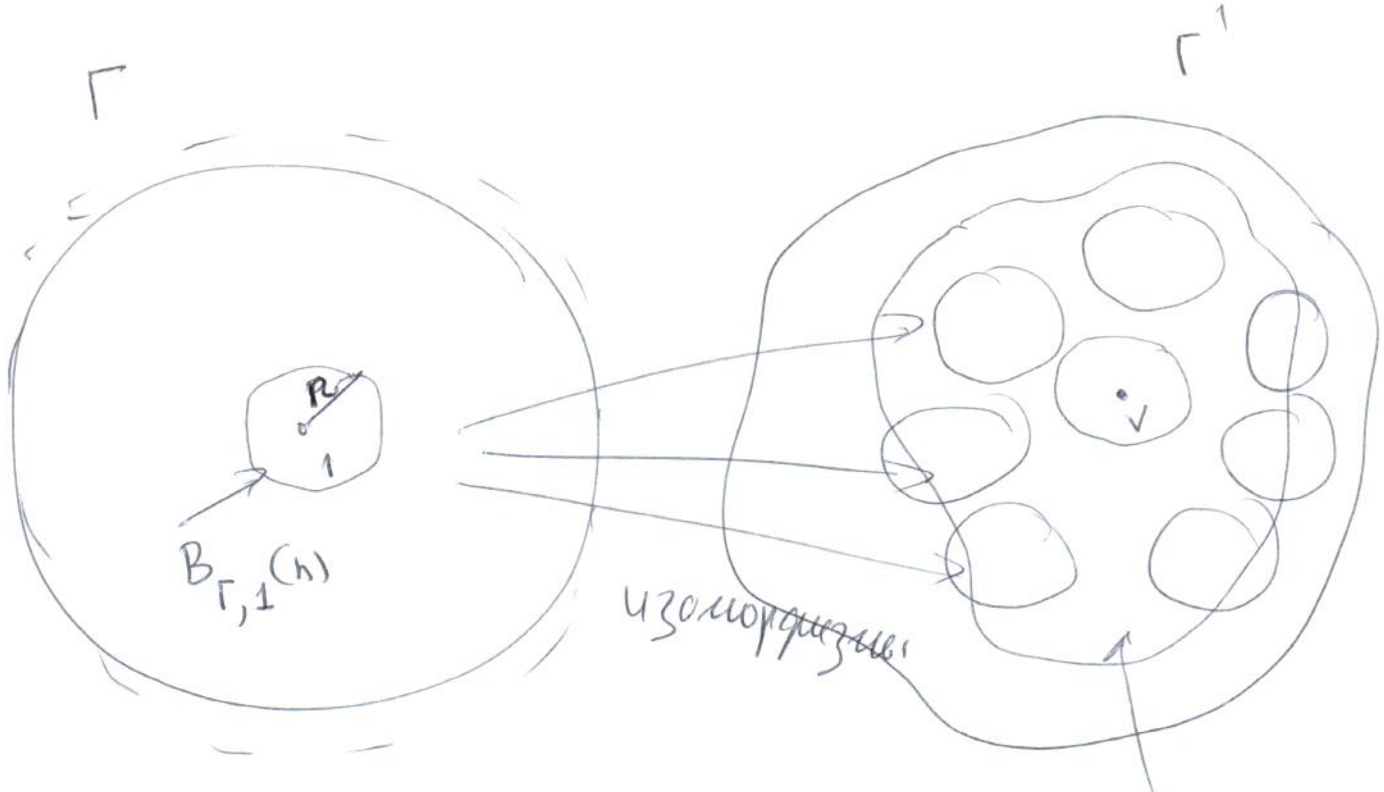
$\Gamma = \Gamma(G, B)$ – граф Кэли, ребра которого "раскрашены" соответствующими порождающими

$$g \xrightarrow{b} bg, \quad b \in B.$$

Группа G называется софической, если для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдется конечный ориентированный граф $\Gamma' = (V', E')$ ребра которого раскрашены элементами из B и подмножество $V_0 \subset V'$ такие, что.

(i) Для каждой вершины $v \in V_0$ окрестность $B_{\Gamma', v}(n)$ в Γ' изоморфна окрестности радиуса n $B_{\Gamma, 1}(n)$.

(ii) $|V_0| \geq (1-\varepsilon)|V'|$.



Проблема (М. Громов).

Существует ли не софическая группа?