

Вайнштейновы многообразия и разложение на ручки

13 декабря 2018 г.

Содержание

1	Стабильность контактных структур	1
1.1	Нормальные формы для контактных многообразий	1
1.2	Стабильность контактных многообразий	3
1.3	Изотропные данные	4
2	Приклеивание ручки по Вайнштейну	5
2.1	Приклеивание ручки к границе гладкого многообразия	5
2.2	Стандартная Лиувиллева стркутрупа на k -ручке	6
2.3	Приклеивание ручки к Лиувиллевой области	7
3	Вайнштейновы многообразия	7
3.1	Функции Ляпунова	7
3.2	Вайнштейновы многообразия и области	8
3.3	Лагранжев скелет	10
3.4	Разложение на ручки	11

1 Стабильность контактных структур

1.1 Нормальные формы для контактных многообразий

Рассмотрим контактное пространство V , то есть векторное пространство, снабженное функционалом α , таким, что форма $d\alpha$ невырождена на $\ker\alpha$.

Определение 1. Подпространство $L \subset V$ называется изотропным, если $L \subset \ker\alpha$ и L изотропно как подпространство симплектического векторного пространства $(\ker\alpha, d\alpha)$.

Замечание 1. Подпространство $L \subset \ker\alpha$ изотропно, если $L \subset L^{\perp d\alpha}$. Тогда выполнено

$$V/L \approx V/\ker\alpha \oplus \ker\alpha/L^{\perp d\alpha} \oplus L^{\perp d\alpha}/L \approx V/\ker\alpha \oplus L \oplus L^{\perp d\alpha}/L.$$

Определение 2. Подмногообразие $K \subset N$ контактного многообразия (N, α) называется изотропным, если в каждой точке $n \in K$

$$T_n K \subset T_n N$$

изотропное подпространство. Конформное Симплектическое Нормальное расслоение к K в N это

$$CSN(K) := T_K^{\perp d\alpha} / T_K$$

Замечание 2. • Расслоение $CSN(K)$ наделяется симплектической структурой ω_K . Класс расслоения $CSN(K)$ меняется при контактоморфизмах, зато конформный класс симплектической структуры определен корректно.

- Существует связность на $CSN(K)$, голономия которой сохраняет не только 2-форму $(\omega_K)_n$, но и 1-форму $(\alpha_K)_n$, для которой

$$d(\alpha_K)_n = (\omega_K)_n.$$

Такие расслоения будем называть точными симплектическими.

- Если зафиксирована контактная форма на N (а не только класс контактоморфизма), то Рибовское векторное поле определяет тривиализацию $T_K N / \ker \alpha$.

Следствие 1. На контактном многообразии (N, α) нормальное расслоение к изотропному подпространству $K \subset N$ расщепляется в прямую сумму

$$T_K N / T_K \approx \mathbb{R} \oplus T_K^* \oplus CSN(K),$$

причем на T_K^* задана стандартная симплектическая структура.

Предложение 1. Для данного многообразия K и точного симплектического векторного расслоения (ν, ω) существует контактное многообразие $(N(K, \nu), \alpha_N)$, содержащее K в качестве изотропного подмногообразия, такое, что

$$(CSN(K), \omega_K) \approx (\nu, \omega).$$

Доказательство. 1) Применим к расслоению (ν, ω) конструкцию симплектической нормальной формы, которой мы пользовались при формулировке теоремы Вайнштейна. Полученное многообразие $(M(K, \nu), \omega_K)$ автоматически точное

$$\omega_K = d\sigma_K$$

- это следует из того, что форма, определенная на тотальном пространстве $Tot(\nu)$, точна.

2) Для точного симплектического многообразия $(M, \omega = d\sigma)$ определена контактификация

$$(N, \alpha) := (M \times \mathbb{R}, \sigma + dt).$$

Это частный случай произведения контактного и точного симплектического многообразий, которое мы обсуждали выше. Заметим, что Рибовское векторное поле на N это $R = \frac{\partial}{\partial t}$ и задано отождествление симплектических векторных расслоений:

$$\ker \alpha = T_M.$$

3) Рассматривая контактификацию $(M(K, \nu), d\sigma_K)$, получаем искомую нормальную форму:

$$(N(K, \nu), \alpha_K) = (M(K, \nu) \times \mathbb{R}, \sigma_K + dt).$$

Действительно, $K \subset N$ изотропно и

$$T_K N / T_K \approx \mathbb{R} \oplus T_K M / T_K \approx \mathbb{R} \oplus T_K^* \oplus \nu,$$

следовательно, $CSN(K) \approx \nu$ как симплектические векторные расслоения. □

Замечание 3. • Все контактные векторные пространства линейно контактоморфны стандартному контактному векторному пространству

$$(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_{st} = \sum_{i=1}^n x \wedge dy_i + dz)$$

причем контактоморфизм сохраняет α . Следовательно,

$$(N(\{p\}, W), \alpha_N) \approx (R^{2n+1}, \alpha_{st})$$

- Нульмерное симплектическое расслоение над K это просто $K \times \{0\}$ и

$$(N(K, K \times \{0\}), \alpha_N) = (T^*L \times \mathbb{R}, \theta_{can} + dt).$$

Это контактное многообразие обозначается $(J^1(K), \alpha_{can})$ и называется пространством 1-струй K ;

- более обще, для тривиального симплектического расслоения $\nu = K \times W$ нормальная форма это просто

$$(N(L, \nu), \alpha_N) = (T^*L, \omega_{can}) \times (\mathbb{R}^{2n}, -\omega_{st}) \times (\mathbb{R}, dt),$$

где справа стоит контактное многообразие, полученное как произведение двух точных симплектических многообразий и одного контактного.

1.2 Стабильность контактных многообразий

В контактном случае выполняется аналог теоремы стабильности.

Предложение 2. Пусть α_0, α_1 - пара контактных структур на гладком многообразии N размерности $\dim N = 2n - 1$. Предположим, что формы совпадают вдоль некоторого гладкого компактного подмногообразия $K \subset N$

$$\alpha_0|_{T_K N} = \alpha_1|_{T_K N}.$$

Тогда существует открытая окрестность $Op(N)$ и контактоморфизм $\phi \in Diff(Op(N))$, постоянный на N .

Доказательство. Рассмотрим семейство 1-форм

$$\alpha_t := t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0.$$

Так как $\alpha_t|_K = \alpha_0|_K$, то существует некоторая открытая окрестность $Op(K)$, на которой поточечно выполнено неравенство

$$(\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^{n-1})|_{Op(K)} > 0,$$

то есть α_t задает семейство контактных структур. Теперь мы можем построить искомым контактоморфизм точно так-же, как в теореме Грея. Там многообразие было компактно, а $Op(K)$ открыто, но единственное, на что это влияет - возможно придется перейти к меньшей окрестности, чтобы был определен поток построенного поля за время 1. $\square$

Нам понадобится усиленная версия этого утверждения, которая работает только для изотропных многообразий.

Предложение 3. Пусть в условиях предыдущего предложения подмногообразие $K \subset N$ изотропно. Тогда окрестность $Op(N)$ и контактоморфизм $\phi \in Diff(Op(N))$, постоянный на N , можно выбрать так, чтобы

$$\phi^*(\alpha_1) = \alpha_0.$$

Доказательство. 1) Воспользовавшись предыдущим утверждением, после перехода к некоторой открытой окрестности $Op(K)$, сведем задачу к случаю $\alpha_1 = e^{h_t}\alpha_0$. Тогда семейство 1-форм

$$\alpha_t := (1-t)\alpha_0 + t\alpha_1 = (1-t + te^{h_t})\alpha_0$$

задает постоянное распределение ядер $ker \alpha_t = \xi$. Ограничение

$$d\alpha_t|_\xi = d((1-t + te^{h_t})\alpha_0)|_{ker \alpha_0} = (1-t + te^{h_t})d\alpha_0|_{ker \alpha_0}$$

невырождено, то есть α_t задает семейство контактных структур на $Op(K)$.

2) Теперь, как и в теореме стабильности, будем строить ϕ как отображение потока векторного поля X_t , на которое мы накладываем условие

$$\phi_t^* \alpha_t = \alpha_0.$$

Дифференцируя это равенство по времени, получаем следующее равносильное условие на X_t :

$$d\iota_{X_t} \alpha_t + \iota_{X_t} d\alpha_t = \alpha_0 - \alpha_1.$$

Пусть R_t - Рибовское векторное поле для α_t и $X_t = a_t R_t + Y_t$, где $Y_t \in \xi$. Обозначим левую часть последнего уравнения за $\beta(a_t, Y_t)$:

$$\begin{aligned} \beta(a_t, Y_t) &= d\iota_{X_t} \alpha_t + \iota_{X_t} d\alpha_t = d(a_t \iota_{R_t} \alpha_t + \iota_{Y_t} \alpha_t) + a_t \iota_{R_t} (d\alpha_t) + \iota_{Y_t} (d\alpha_t) = \\ &= da_t + \iota_{Y_t} (d\alpha_t). \end{aligned}$$

3) Теперь, обозначим

$$b_t := \iota_{R_t} (\alpha_0 - \alpha_1), \quad \alpha := (\alpha_0 - \alpha_1)|_\xi.$$

Утверждается, что достаточно решить систему

$$\iota_{R_t} da_t = b_t, \quad \iota_{Y_t} (d\alpha_t) = \alpha - da_t|_\xi.$$

Действительно, из нее следует, что

$$\beta(a_t, Y_t) = da_t + \alpha - da_t|_\xi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \beta(a_t, Y_t)|_\xi = \alpha = (\alpha_0 - \alpha_1)|_\xi, \\
&\Rightarrow \iota_{R_t} \beta(a_t, Y_t) = \iota_{R_t} da_t = \iota_{R_t} (\alpha_0 - \alpha_1), \\
&\Rightarrow \beta(a_t, Y_t) = \alpha_0 - \alpha_1.
\end{aligned}$$

4) Осталось показать, что следующая система имеет решения

$$\begin{aligned}
&\iota_{R_t} da_t = b_t, \\
&\iota_{Y_t} (d\alpha_t) = \alpha - da_t|_\xi, \\
&Y_t|_K = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что второе уравнение имеет решения для произвольного a_t (из невырожденности ограничения $d\alpha_t|_\xi$). Так как $\alpha|_K = 0$, эта система равносильная следующей

$$\begin{aligned}
&\iota_{R_t} da_t = b_t, \\
&(da_t|_\xi)|_K = 0.
\end{aligned}$$

Так как $b_t|_K = 0$, это уравнение имеет решение на некоторой окрестности $Op(K)$. □

Следствие 2. Пусть (N, α) - гладкое контактное многообразие, $K \subset N$ замкнутое изотропное подмногообразие. Тогда существует открытая окрестность $Op(K)$ и контаморфизм

$$\phi : Op(K) \rightarrow N(K, CSN(K))$$

сохраняющий контактную 1-форму.

Доказательство. Открытая окрестность K в N диффеоморфна тотальному пространству нормального расслоения к K в N , то есть $N(K, CSN(K))$. Теперь утверждение следует из теоремы стабильности для контактных 1-форм α и $\psi^* \alpha_N$ □

Следствие этой теоремы - аналоги теорем Дарбу и Вайнштейна для контактных многообразий

Следствие 3. (Контактная теорема Дарбу) Пусть (N, α) - контактное многообразие размерности $2n + 1$. Тогда для любой точки $n \in N$ существует открытая окрестность $Op(n)$ и диффеоморфизм $\phi : Op(n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, переводящий стандартную контактную форму в ограничение $\alpha|_{Op(n)}$.

Определение 3. Рассмотрим контактное многообразие (N, α) размерности $2n + 1$. Изотропное подмногообразие $K \subset N$ называется Лежандровым, если оно имеет максимальную размерность

$$\dim K = n.$$

Следствие 4. (Контактная теорема Вайнштейна) Пусть (N, α) - контактное многообразие размерности $2n + 1$. Тогда для произвольного Лежандрова подмногообразия K существует открытая окрестность $Op(K)$ и диффеоморфизм $\phi : Op(K) \rightarrow J^1(K)$, переводящий стандартную контактную форму в ограничение $\alpha|_{Op(K)}$.

1.3 Изотропные данные

Определение 4. Пятерка (V, ω, X, N, K) называется изотропными данными, если

- V - гладкое многообразие;
- ω - симплектическая форма;
- X - Лиувиллево векторное поле;
- N - ω -выпуклая гиперповерхность;
- K - изотропное подмногообразие в N .

Будем обозначать $CSN(K)$ Конформное Симплектическое Расслоение K в N с индуцированной симплектической структурой.

Следствие 5. Пусть (V, ω, X, N, K) - изотропные данные. Тогда существует открытая окрестность $Op_V(K)$ и диффеоморфизм на симплектизацию $N(K, CSN(K))$

$$\phi : Op_V(K) \rightarrow S(N(K, CSN(K))),$$

такой, что ϕ

- тождественен на K ;
- переводит $Op_N(K) = N \cup Op_V(K)$ в $N(K, CSN(K))$;
- сохраняет Лиувиллево векторное поле, в частности является точным симплектоморфизмом.

Доказательство. По теореме стабильности для контактных изотропных подмногообразий существует открытая окрестность $Op_N(K)$ и диффеоморфизм

$$\psi_1 : Op_N(K) \rightarrow N(K, CSN(K))$$

сохраняющий контактную 1-форму и постоянный на K . По теореме стабильности для выпуклых гиперповерхностей, существует симплектоморфизм

$$\psi_2 : Op_V(Op_N(K)) \rightarrow S(Op_N(K))$$

сохраняющий Лиувиллево векторное поле и постоянный на $Op_N(K)$. Теперь в качестве открытой окрестности K в V можно выбрать

$$Op_V(K) := Op_V(Op_N(K))$$

и ϕ получается как композиция

$$\phi := S(\psi_1) \circ \psi_2.$$

□

Следствие 6. Пусть теперь $(V, \partial V, \omega, X)$ - Лиувилева область, и задана изотропная сфера S^k в ∂V , конформное симплектическое нормальное расслоение к которому тривиально

$$CSN(S^k) = S^k \times (\mathbb{R}^{2m}, \omega_{st}).$$

Тогда существует открытая окрестность $Op_V(S^k)$ и диффеоморфизм

$$\psi : Op_V(S^k) \rightarrow S((J^1(S^k), \alpha_{can}) \times (\mathbb{R}^{2m}, \omega_{st})),$$

постоянный на S^k , сохраняющий $Op_{\partial V}(S^k)$ и Лиувиллево векторное поле.

Доказательство. Рассмотрим симплектизацию $(\hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X})$. Тогда $(\hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X}, \partial V, S^k)$ это изотропные данные и применимо предыдущее предложение. □

2 Приклеивание ручки по Вайнштейну

2.1 Приклеивание ручки к границе гладкого многообразия

Определение 5. k -ручкой размерности $2n$ называется многообразие с углами

$$H_\epsilon^k := \mathbb{D}_{1+\epsilon}^k \times \mathbb{D}_\epsilon^{2n-k} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Определение 6. • Диск $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{1+\epsilon}^k \times \{0\}$ называется подошвенным диском.

- Граница $S = \partial \mathbb{D} = S^{k-1} \times \{0\}$ называется подошвенной сферой.
- Подмногообразие $\partial^- H_\epsilon^k = \partial(\mathbb{D}_{1+\epsilon}^k) \times \mathbb{D}_\epsilon^{2n-k}$ называется нижней компонентой границы.
- Открытая окрестность $\partial^- H_\epsilon^k$ в H_ϵ^k называется присоединяемым регионом

$$Op(\partial^- H_\epsilon^k) = H_\epsilon^k - \mathbb{D}_1^k \times \mathbb{D}_\epsilon^{2n-k}.$$

Рассмотрим многообразие V размерности $\dim V = 2n$ с краем ∂V . Пусть задано вложение

$$i : \partial^- H_\epsilon^k \rightarrow \partial V.$$

Отображение i индуцирует вложение пар (тут и далее мы предполагаем, что ϵ достаточно мало)

$$i : (U, U \cap \partial V) \rightarrow (V, \partial V).$$

Многообразия V и H_ϵ^k можно склеить по отображению i .

Определение 7. Говорят, что многообразие с краем $\hat{V}$ получено приклеиванием k -ручки к V по отображению i , если

$$\hat{V} := V \cup_i H_\epsilon^k.$$

Замечание 4. • $2n$ -мерные k -ручки H_ϵ^k для разных значений ϵ канонически диффеоморфны. Мы будем иногда опускать ϵ в обозначениях.

- Что более важно, результат приклеивания $2n$ -мерной k -ручки к многообразию V не зависит от ϵ - точнее, полученные приклеиванием многообразия канонически диффеоморфны.

Предложение 4. Существует биекция между множествами

- вложений H^k в край ∂V ;
- вложениями S^{k-1} в ∂V с тривиализованными нормальными расслоениями к образу;

рассмотренными с точностью до изотопии.

Доказательство. 1) Нормальное расслоение к S в $\partial^- H^k$ тривиально и тривиализовано. Следовательно, каждое вложение $i : \partial^- H_\epsilon^k \rightarrow \partial V$ индуцирует вложение корневой сферы $j := i|_S S \rightarrow \partial V$ и тривиализацию нормального расслоения к образу

$$N_{j(S)}(\partial V) \rightarrow S \times \mathbb{R}^{2n-k}.$$

2) Рассмотрим вложение сферы $S \rightarrow \partial V$, нормальное расслоение к образу которой тривиализовано. По теореме о трубчатой окрестности, $Op_{\partial V}(j(S))$ диффеоморфно тотальному пространству нормального расслоения. Следовательно, j может быть продолжено до вложения из нижней компоненты границы. Продолжение зависит от окрестности, существование которой утверждается в теореме, но для разных окрестностей продолжения будут диффеотопны. $\square$

Таким образом по многообразию с краем V и паре

$$(j : S \rightarrow \partial V, \text{ тривиализация расслоения } N_{j(S)}\partial V)$$

можно построить $\hat{V}$.

Предложение 5. Изотопия пар $(j_t : S \rightarrow \partial V, \text{ тривиализация расслоения } N_{j_t(S)}\partial V)$ индуцирует канонический диффеоморфизм многообразий $\hat{V}_t$.

2.2 Стандартная Лиувиллева структура на k -ручке

Сейчас мы построим точную симплектическую форму и Лиувиллево векторное поле на $2n$ -мерной k -ручке H^k . Для этого рассмотрим H^k как открытое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$:

$$H^k = \{\Sigma_{i=1}^k x_i^2 \leq (1 + \epsilon), \Sigma_{j=1}^k y_j^2 \Sigma_{j=k+1}^n |z_j|^2 \leq \epsilon^2\}.$$

Симплектическая структура и Лиувиллево векторное поле в этих координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \Sigma_{i=1}^k dp_i \wedge dq_i + \Sigma_{j=1}^{n-k} dx_j \wedge dy_j, \\ X &= 2\Sigma_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial p_i} - \Sigma_{i=1}^n q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \Sigma_{j=1}^{n-k} (x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j}). \end{aligned}$$

Замечание 5. • Нижняя компонента границы $\partial^- H^k$ является $-\omega$ -выпуклой гиперповерхностью (выпуклой гиперповерхностью для симплектической формы $-\omega$). Таким образом, на ней индуцирована контактная структура.

- Корневая сфера S^{k-1} является изотропным подмногообразием в $\partial^- H^k$.
- Стабильное и нестабильное подмногообразия $W^\pm$ для единственной критической точки в нуле имеют вид

$$\begin{aligned} W^+ &= \{q = 0\} \approx \mathbb{R}^{2n-k}, \\ W^- &= \{p = 0, z = 0\} \approx \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

2.3 Приклеивание ручки к Лиувиллевой области

Пусть на многообразии с краем $(V, \partial V)$ задана структура Лиувиллевой области (ω, X) . Рассмотрим изотропное вложение j сферы S^{k-1} в контактное многообразие ∂V и тривиализацию нормального расслоения $N_{j(S^{k-1})}\partial V$.

Предложение 6. (Вайнштейн) На многообразии $\hat{V}$, полученном приклеиванием k ручки существует Лиувиллевы структура $(\hat{V}, \partial\hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X})$, такое, что

- $(\hat{\omega}, \hat{X})|_V = (\omega, X)$;
- Тривиализация нормального расслоения к корневой сфере совпадает с данным.

Эта структура определена канонически с точностью до диффеотопии.

Доказательство. Заметим, что нормальное расслоение к подошвенной сфере тривиализовано, так что ее окрестность в V симплектоморфна симплектизации

$$\psi : Op_V(S^k) \rightarrow S((J^1(S^k), \alpha_{can}) \times (\mathbb{R}^{2m}, \omega_{st})),$$

причем симплектоморфизм сохраняют Лиувиллево векторное поле.

Зафиксируем $\delta > 0$. Рассмотрим

$$N_\delta := \{|q| \leq 1, |p|^2 + |z|^2 \leq \delta\} \subset H^k.$$

Это трубчатая окрестность изотропного диска $\mathbb{D}$. Рассмотрим M_δ - утолщение N_δ под действием поля X . Тогда дополнение $M_\delta - W^+$ отождествляется с симплектизацией $Op_\partial V(S^{k-1})$ и мы можем их склеить согласованно с симплектической структурой и Лиувилевым векторным полем. $\square$

Замечание 6. Пусть теперь задана диффеотопия пар

$$(j_t : S \rightarrow \partial V \text{ изотропное вложение, тривиализация расслоения } N_{j(S)}\partial V)$$

в пространстве изотропных вложений. Заметим, что конструкция из предыдущего предложения определяет деформацию Лиувиллевых областей $(\hat{V}_t, \partial\hat{V}_t, \hat{\omega}_t, \hat{X}_t)$, то есть построенные Лиувиллевы области деформационно эквивалентны.

3 Вайнштейновы многообразия

3.1 Функции Ляпунова

Пусть V - гладкое многообразие, X - векторное поле на V .

Определение 8. Гладкая функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для X , если для

- некоторой метрики ρ на V и
- некоторого положительного числа $\delta \in \mathbb{R}_+$

поточечно выполнено неравенство:

$$X \cdot f \geq \delta(|X|^2 + |df|^2).$$

В этой ситуации говорят, что векторное поле X градиентноподобно для f , а (X, f) - пара Ляпунова на V .

Замечание 7. Пусть (X, f) - пара Ляпунова на V . Тогда для $x \in V$ следующее равносильно:

$$df(x) = 0 \Leftrightarrow |X|_x = |df|_x = 0 \Leftrightarrow X(x) = 0,$$

то есть критические точки f совпадают с нулями поля X . Рассмотрим интегральную кривую

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

не проходящую через критическую точку,

$$d(f \circ \gamma) = X \cdot f > 0,$$

то есть вне нулей поля X функция f растет вдоль X .

Пример 1. Следующие пары (X, f) являются примером пар Ляпунова на многообразии V

- на произвольном римановом многообразии V произвольная функция f является функцией Ляпунова для градиентного векторного поля ∇f ;
- На Штейновом многообразии V ограничение плуриармонической функции $f = |z|^2|_V$ является функцией Ляпунова для стандартного Лиувиллевого векторного поля

$$X = [\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i})]|_V;$$

- На пространстве касательного расслоения $V = T^*Q$ риманового многообразия функция $f(x, v) = |v|$ является функцией Ляпунова для стандартного Лиувиллевого векторного поля;
- На пространстве симплектизации $N \times \mathbb{R}$ функция $f = t$ является функцией Ляпунова для стандартного Лиувиллевого векторного поля $X = \frac{\partial}{\partial t}$;

Предложение 7. Рассмотрим многообразие V и векторное поле X . Тогда множество функций Ляпунова f для X образует замкнутый конус. В частности, оно пусто либо стягиваемо.

Определение 9. Функция f на гладком многообразии V называется морсовской, если все критические точки $x \in \text{Crit}(f)$ невырождены. Это значит, что в каждой критической точке $x \in \text{Crit}(f) \subset V$ гессиан обратим:

$$\text{Hess}_x(f) = \nabla^2 f \in \text{Aut}(T_x M).$$

Функция f называется обобщенно-морсовской, если критические точки f невырождены или эмбриональны. Эмбриональной называется критическая точка x , в которой гессиан имеет одномерное ядро, в направлении которого третья частная производная f больше 0.

Определение 10. Гладкое семейство функций $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии V называется невырожденным, если

- каждая функция $f_t : V \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ обобщенно морсовская;
- каждая критическая точка $p \in \text{Crit}(f_t)$, не являющаяся морсовской для некоторого t , является особенностью типа рождения-уничтожения. Это означает, что f в точке (p, t) невырождено.

Для двух обобщенно морсовских функций f_0, f_1 невырожденное семейство f_t называется невырожденной деформацией.

Предложение 8. Для гладкого многообразия V выполнены следующие утверждения:

- множество функций Морса образует открытое всюду плотное подмножество в множестве всех гладких функций.
- для двух произвольных (обобщенно) морсовских функций f_1, f_2 множество невырожденных деформаций образует открытое и всюду плотное подмножество в множестве гладких семейств, соединяющих f_1 и f_2 .

Определение 11. Пара Ляпунова (X, f) на V называется невырожденной, если f - обобщенно-морсовская функция на V . Семейство пар Ляпунова (X_t, f_t) называется невырожденной деформацией, если f_t - невырожденное семейство функций.

Следствие 7. Пусть X - векторное поле на многообразии V , допускающее функцию Ляпунова f . Тогда существует некоторое шевеление g функции f , являющаяся морсовской функцией Ляпунова для X . При этом для двух таких шевелений существует невырожденная деформация между ними. Таким образом, невырожденная пара (X, g) определена канонически с точностью до деформации.

3.2 Вайнштейновы многообразия и области

Рассмотрим компактное многообразие V с краем ∂V .

Определение 12. Структура Вайнштейновой области на $(V, \partial V)$ это тройка (ω, X, f) , такая, что:

- $(V, \partial V, \omega, X)$ - Лиувилева область;

- f - функция на V , такая, что $f^{-1}(0) = \partial V$ и
- (X, f) - пара Ляпунова.

Рассмотрим гладкое многообразие без края V .

Определение 13. Структура Вайнштейнова многообразия на V это тройка (ω, X, f) такая, что

- (V, ω, X) - Лиувиллево многообразие;
- f - функция на V , такая, что
- (X, f) - пара Ляпунова.

Замечание 8. Заметим, что любая регулярная гиперповерхность $f^{-1}(c)$ функции Ляпунова f для Лиувиллевого векторного поля X автоматически ω -выпуклая. Таким образом, вторая часть определения Лиувиллевого многообразия (существование функции f и последовательности регулярных значений c_i) выполнена автоматически.

Определение 14. • Гладкое семейство $(V, \partial V, \omega_t, X_t, \phi_t)$ Вайнштейновых областей называется деформацией Вайнштейновых областей, если $(V, \partial V, \omega_t, X_t)$ - деформация Лиувиллевых областей.

- Аналогично определяется деформация Вайнштейновых многообразий.
- Две Вайнштейновых области (или два Вайнштейнова многообразия) называются деформационно эквивалентными, если существует деформация между ними.

Замечание 9. Таким образом, деформационные Вайнштейновы многообразия точно симплектоморфны.

Пусть на Лиувиллевом многообразии $(V, \partial V, \omega, X)$ зафиксирована функция Ляпунова f (не обязательно обобщенно морсовская). Рассмотрим Морсификацию g функции f . Тогда $(V, \partial V, \omega, X, g)$ - Вайнштейново многообразие.

Замечание 10. Вайнштейново многообразие $(V, \partial V, \omega, X, g)$ определено канонически с точностью до деформации. Действительно, для двух разных выборов g_0, g_1 существует семейство обобщенно морсовских функций g_t . Тогда $(V, \partial V, \omega, X, g_t)$ - Вайнштейнова деформация.

Таким образом, если мы интересуемся Вайнштейновыми многообразиями с точностью до деформации, условие обобщенно-морсовости f из определения можно исключить.

Замечание 11. Рассмотрим пару Вайнштейновых многообразий $(V_1, \omega_1, X_1, f_1)$ и $(V_2, \omega_2, X_2, f_2)$. Тогда морсификация функции $f_1 + f_2$ определяет каноническую структуру Вайнштейнова многообразия на произведение Лиувиллевых многообразий $(V_1, \omega_1, X_1) \times (V_2, \omega_2, X_2)$.

Пример 2. Стандартные примеры Лиувиллевых многообразий допускают функцию Ляпунова, так что являются примерами Вайнштейновых многообразий:

- на $\mathbb{C}^n$ есть функция $\phi = |z|^2$,
- на кокасательном расслоении T^*Q есть $\phi = \sum_{i=1}^n p_i^2$.

Замечание 12. Пусть $(V, \partial V, \omega, X, f)$ - Вайнштейнова область. Тогда определено пополнение $(\hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X})$. Произвольное морсификация произвольного сглаживания функции $\hat{f}$, заданной

$$\hat{f}|_V = f, \quad \hat{f}|_{\partial V \times [0, +\infty)} = t,$$

определяет структуру Вайнштейнова многообразия на $(\hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X})$. Оно каноническое с точностью до деформации.

Замечание 13. Пусть $(V, \partial V, \omega, X, f)$ - Вайнштейнова область.

Определение 15. Вайнштейново многообразие (V, ω, X, f) имеет простой тип, если существует подобласть $W \subset V$, такая, что функция f не имеет нулей на $V - W$.

Предложение 9. Вайнштейново многообразие имеет конечный тип тогда и только тогда, когда может быть получено из Вайнштейновой области симплектизацией.

Доказательство. Пусть Вайнштейново многообразие (V, ω, X, f) имеет простой тип. Тогда поле X тоже не имеет нулей на $V - W$, следовательно, Лиувиллево многообразие (V, ω, X) имеет простой тип. Тогда (V, ω, X, f) получается из подобласти W симплектизацией. Ограничение f на W задает структуру Вайнштейновой области $(W, \partial W, \omega, X, f)$ и (V, ω, X, f) получается из нее симплектизацией. $\square$

3.3 Лагранжев скелет

Определение 16. Рассмотрим векторное поле X на гладком многообразии V . Пусть точка $p \in V$ - ноль векторного поля X . Тогда линеаризация оператора потока задает эндоморфизм касательного пространства в p

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t = A \in \text{End}(T_p V).$$

Точка p называется гиперболической, если оператор A не имеет чисто мнимых собственных значений.

Касательное пространство к гиперболической точке p векторного поля X на V автоматически расщепляется в сумму

$$T_p V = E^+ \oplus E^- = \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A), \text{Re}(\lambda) > 0} \bigoplus_i \ker(A - \lambda^i \text{Id}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A), \text{Re}(\lambda) < 0} \bigoplus_i \ker(A - \lambda^i \text{Id}) \right).$$

Следующее утверждение - частный случай теоремы о стабильном многообразии

Предложение 10. Пусть p - гиперболическая точка векторного поля X на V . Тогда стабильное и нестабильное подмножества

$$W^s(p) = \{x \in V \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = p\}$$

$$W^n(p) = \{x \in V \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p\}$$

являются подмногообразиями V вне точки p и выполнено

$$T_p W^s(p) = E^-, \quad T_p W^n(p) = E^+.$$

Определение 17. Лагранжевым скелетом Вайнштейнова многообразия (области) называется скелет соответствующего Лиувиллевого многообразия (области).

Предложение 11. Рассмотрим Вайнштейново многообразие (V, ω, X, f) . Тогда Лагранжев скелет есть объединение

$$Sk(V, \omega, X) = \bigcup_{p \in \text{Crit}(f)} W^s(p)$$

стабильных многообразий функции f по критическим точкам $\text{Crit}(f)$. Таким образом, Лагранжев скелет - стратифицированное многообразие.

Доказательство. Действительно, по определению $x \in Sk(V, \omega, X)$ тогда и только тогда, когда траектория $\phi_t(x)$ полностью содержится в компактной подобласти. Тогда у множества $\{\phi_t(x)\}$ существует предельная точка p в V . Так как функция f растет вне нулей поля, p ноль и единственная предельная точка, следовательно предел. Следовательно, $x \in W^s(p)$. $\square$

Предложение 12. Скелет $Sk(V, \omega, X)$ Вайнштейнова многообразия (V, ω, X, f) является изотропным подмногообразием (V, ω) вне особых точек.

Доказательство. 1) Пусть $x \in Sk(V, \omega, X)$, $v_1, v_2 \in T_x V$ - пара касательных векторов. Тогда для диффеоморфизма $\phi_t : V \rightarrow V$ имеем

$$\omega(v_1, v_2) = \phi_t^*(\omega(v_1, v_2)) = \omega(D\phi_t(v_1), D\phi_t(v_2)),$$

так что достаточно проверить утверждение для касательных векторов в критической точке p .

2) Так как критическая точка p - ноль векторного поля X , поток сохраняет p и $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t = A$ - автоморфизм касательного пространства. Заметим, что

$$T_p W^s(p) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A), \text{Re}(\lambda) < 0} \bigoplus_i \ker(A - \lambda^i \text{Id}).$$

3) Рассмотрим два вектора $v_1, v_2 \in T_p W^s(p)$. Тогда

$$\omega(v_1, v_2) = e^{-t}\omega(e^A v_1, e^A v_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$\square$

Замечание 14. Так как Лагранжев скелет Вайнштейновой области является частным случаем Лагранжева скелета Вайнштейнова многообразия, аналогичные утверждения выполнены и для него.

Следствие 8. Рассмотрим Вайнштейново многообразие (V, ω, X, f) (Вайнштейнову область $(V, \partial V, \omega, X, f)$) размерности $\dim V = 2n$. Тогда критические точки $p \in \text{Crit}(f)$ функции Ляпунова f имеют индекс не более половины размерности

$$\text{ind}(p) \leq n.$$

Следовательно, многообразие V (область $(V, \partial V)$) не имеет гомологий и когомологий в размерности больше половины

$$H^{*+n}(V) = H_{*+n}(V) = 0 \text{ для } * > 0.$$

3.4 Разложение на ручки

Пусть на многообразии с краем $(V, \partial V)$ задана структура Вайнштейновой области (ω, X, f) . Рассмотрим изотропное вложение j сферы S^{k-1} в контактное многообразие ∂V и тривиализацию нормального расслоения. Тогда определена Лиувиллева область

$$(\hat{V}, \partial \hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X}) -$$

которая получается приклеиванием ручки по Вайнштейну.

Замечание 15. На $(\hat{V}, \partial \hat{V}, \hat{\omega}, \hat{X})$ существует каноническая структура Вайнштейновой области.

Предложение 13. Произвольная Вайнштейнова область $(V, \partial V, \omega, X, f)$ деформационно эквивалентна некоторой области, которая может быть получена из пустого множества приклеиванием ручек по Вайнштейну. При этом, последовательность приклеиваний такая-же, как у разложения V на ручки, заданного Морсовским шевелением функции f .

Определение 18. Вайнштейнова область $(V, \partial V, \omega, X, f)$ размерности $\dim V = 2n$ называется субкритической, если она деформационно эквивалентна Вайнштейновой области, полученной приклеиванием ручек по Вайнштейну индекса строго меньше n . Вайнштейново многообразие называется субкритическим, если оно деформационно эквивалентно стабилизации субкритической Вайнштейновой области.